Ejemplo 7.4 Cálculo de rapidez en un círculo vertical

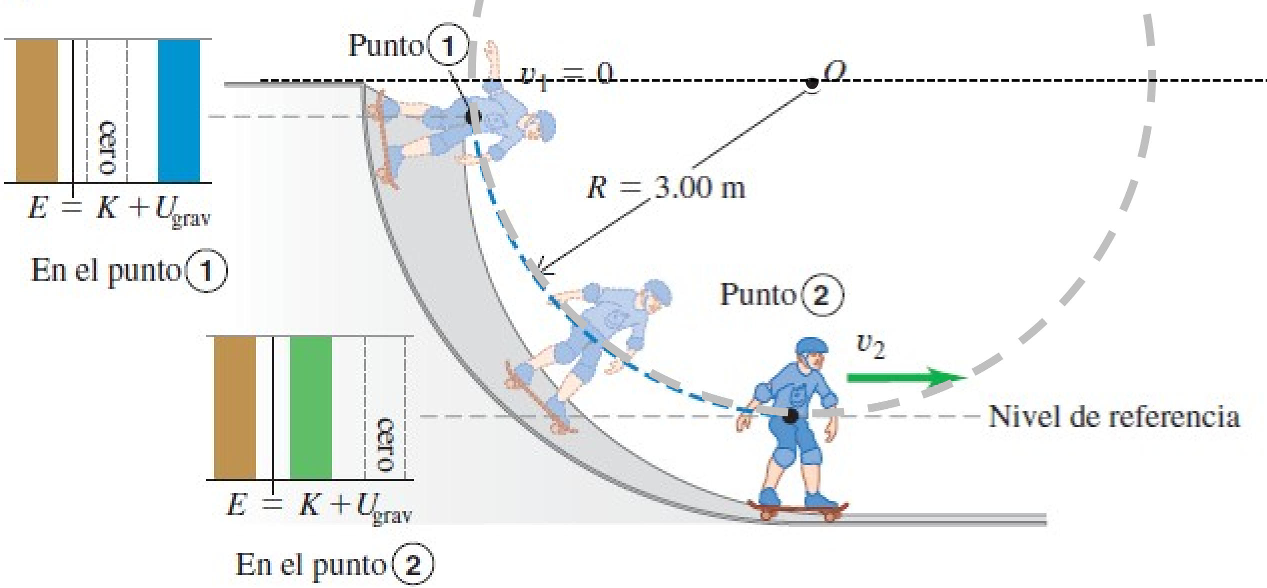
Imagine que su primo Morton baja en patineta por una rampa curva en un parque. Tratando a Morton y a su patineta como una partícula, ésta describe un cuarto de círculo de radio $R = 3.00$ m (figura 7.9). La masa total de Morton y su patineta es de 25.0 kg. Él parte del reposo y no hay fricción. *a*) Calcule su rapidez en la base de la rampa. *b*) Obtenga la fuerza normal que actúa sobre él en la base de la rampa.

$$y_1 = R \qquad v_1 = 0$$

$$y_2 = 0 \qquad v_2 = ?$$

PLANTEAR: Puesto que no hay fricción, la única fuerza además del peso de Morton es la fuerza normal $\vec{n}$ ejercida por la rampa (figura 7.9b). Aunque esta fuerza actúa en toda la trayectoria, *no* efectúa trabajo porque $\vec{n}$ siempre es perpendicular al desplazamiento de Morton. Así, $W_{otras} = 0$ y se conserva la energía mecánica.

a)



EJECUTAR: *a*) Las diferentes energías son

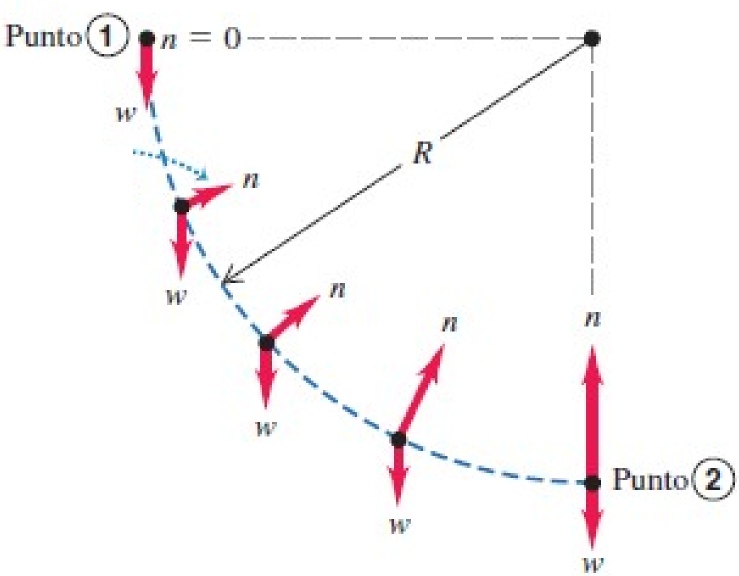
$$K_1 = 0 \qquad U_{grav,1} = mgR$$
$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad U_{grav,2} = 0$$

$$y_1 = R \qquad v_1 = 0$$
$$y_2 = 0 \qquad v_2 = ?$$

Por la conservación de la energía,

$$K_1 + U_{grav,1} = K_2 + U_{grav,2}$$
$$0 + mgR = \frac{1}{2}mv_2^2 + 0$$
$$v_2 = \sqrt{2gR}$$
$$= \sqrt{2(9.80\ \text{m/s}^2)(3.00\ \text{m})} = 7.67\ \text{m/s}$$

b)



b) Para obtener n en el punto 2 empleando la segunda ley de Newton, necesitamos el diagrama de cuerpo libre en ese punto (figura 7.9b). En el punto 2, Morton se mueve con rapidez $v_2 = \sqrt{2gR}$ en un círculo de radio R; su aceleración es hacia el centro del círculo y tiene magnitud

$$a_{rad} = \frac{v_2^2}{R} = \frac{2gR}{R} = 2g$$

Si tomamos la dirección $+y$ hacia arriba, la componente y de la segunda ley de Newton es

$$\sum F_y = n + (-w) = ma_{rad} = 2mg$$
$$n = w + 2mg = 3mg$$
$$= 3(25.0\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 735\ \text{N}$$

¿Qué hacer si hay más fuerzas haciendo trabajo?

Si otras fuerzas actúan sobre el cuerpo además de su peso, entonces $\vec{F}_{\text{otras}}$ de la figura 7.2 *no* es cero.

$$W_{\text{grav}} = U_{\text{grav},1} - U_{\text{grav},2}$$

El trabajo gravitacional W_{grav} aún está dado por la ecuación (7.3), pero el trabajo total W_{tot} es la suma de W_{grav} y el trabajo de $\vec{F}_{\text{otras}}$. Llamamos a este trabajo adicional W_{otras}, de modo que el trabajo total realizado por todas las fuerzas es $W_{\text{tot}} = W_{\text{grav}} + W_{\text{otras}}$. Igualando esto al cambio de energía cinética, tenemos

$$\boxed{W_{\text{otras}} + W_{\text{grav}} = K_2 - K_1} \qquad (7.6)$$

Además, por la ecuación (7.3), $W_{\text{grav}} = U_{\text{grav},1} - U_{\text{grav},2}$, así que

$$W_{\text{otras}} + U_{\text{grav},1} - U_{\text{grav},2} = K_2 - K_1$$

$$W_{\text{tot}} = K_2 - K_1 = \Delta K$$

que podemos reacomodar así:

$$K_1 + U_{\text{grav},1} + W_{\text{otras}} = K_2 + U_{\text{grav},2} \quad \text{(si otras fuerzas además de la gravedad efectúan trabajo)} \tag{7.7}$$

Por último, usando las expresiones adecuadas para los distintos términos de energía:

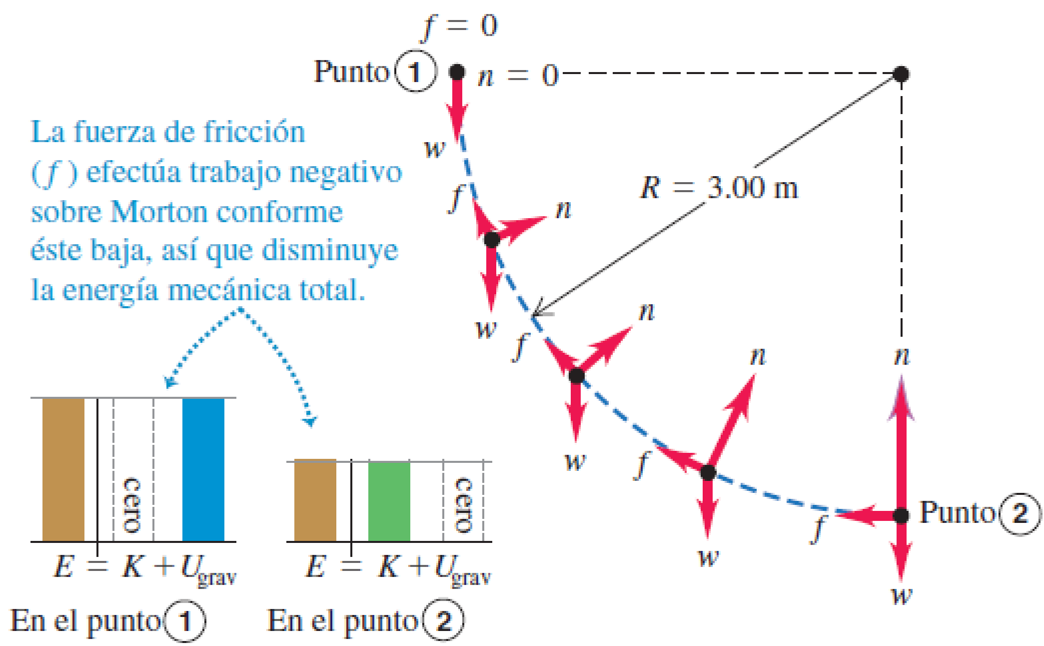
$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 + W_{\text{otras}} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 \quad \text{(si otras fuerzas además de la gravedad efectúan trabajo)} \tag{7.8}$$

El significado de las ecuaciones (7.7) y (7.8) es que *el trabajo realizado por todas las fuerzas* distintas de la fuerza gravitacional *es igual al cambio en la energía mecánica total $E = K + U_{\text{grav}}$ del sistema, donde U_{grav} es la energía potencial gravitacional. Si* W_{otras} es positivo, E aumenta y $(K_2 + U_{\text{grav},2}) > (K_1 + U_{\text{grav},1})$. Si W_{otras} es negativo, E disminuye (figura 7.5). En el caso especial en que sólo el peso del cuerpo realiza trabajo, $W_{\text{otras}} = 0$. Entonces, la energía mecánica total es constante, y volvemos a la ecuación (7.4) o (7.5).

Ejemplo 7.5 Círculo vertical con fricción

En el ejemplo 7.4, suponga que la rampa tiene fricción y la rapidez de Morton en la base es de sólo 6.00 m/s. ¿Qué trabajo efectuó la fuerza de fricción sobre él?

$$y_1 = R \qquad v_1 = 0$$



EJECUTAR: Las energías son

$$K_1 = 0$$

$$U_{grav,1} = mgR = (25.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(3.00\text{ m}) = 735\text{ J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(25.0\text{ kg})(6.00\text{ m/s})^2 = 450\text{ J}$$

$$U_{grav,2} = 0$$

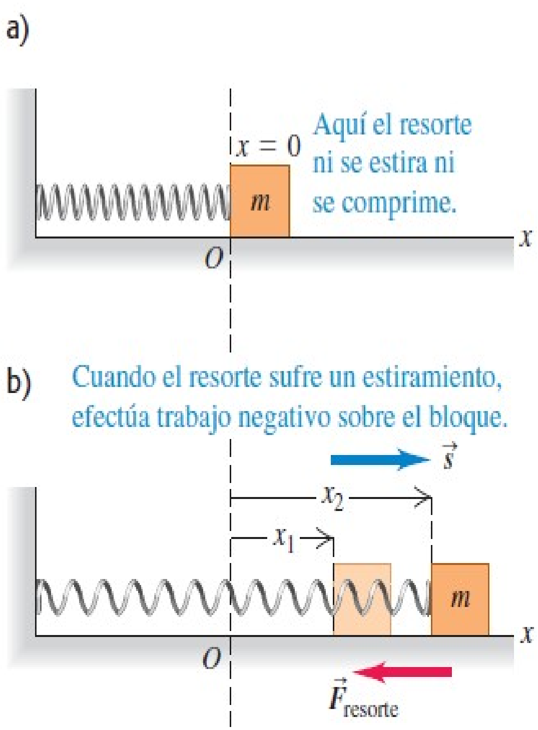
Por la ecuación (7.7),

$$W_f = K_2 + U_{grav,2} - K_1 - U_{grav,1}$$
$$= 450\text{ J} + 0 - 0 - 735\text{ J} = -285\text{ J}$$

El trabajo efectuado por la fuerza de fricción es -285 J, y la energía mecánica total *disminuye* en 285 J. ¿Entiende por qué W_f debe ser negativo?

7.2 Energía potencial elástica

Hay muchas situaciones donde encontramos energía potencial que no sea de naturaleza gravitacional. Un ejemplo es la banda de hule de una resortera. El trabajo es efectuado por la fuerza que estira la banda, y ese trabajo se almacena hasta en la banda hasta que ésta se suelta. Entonces, la banda imparte energía cinética al proyectil.



¿Cuánto trabajo realiza el resorte sobre la masa m?

$$W = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \qquad \text{(trabajo efectuado } \textit{sobre} \text{ un resorte)}$$

. Ahora nos interesa el trabajo efectuado *por* el resorte. Por la tercera ley de Newton, un trabajo es el negativo del otro. Cambiando los signos en la ecuación, vemos que, al desplazarse de x_1 a x_2, el resorte efectúa un trabajo W_{el} dado por

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \qquad \text{(trabajo efectuado } \textit{por} \text{ un resorte)}$$

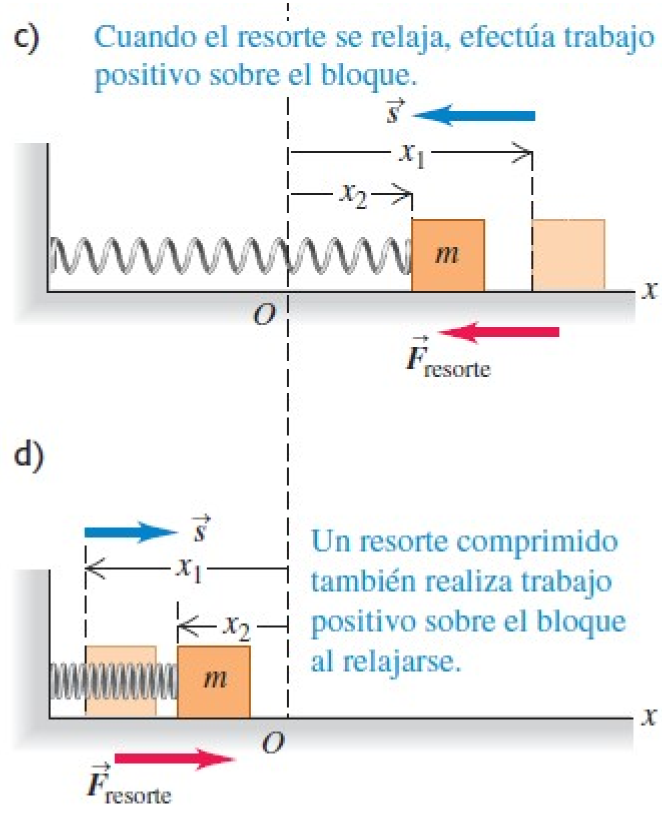
ordar: F= -kx

-kx*desplazamiento*cos(entre F y el desplazamie

$$\boxed{W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2}$$

$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 \qquad \text{(trabajo efectuado } por \text{ un resorte)}$$

Veamos que pasa en esta situación

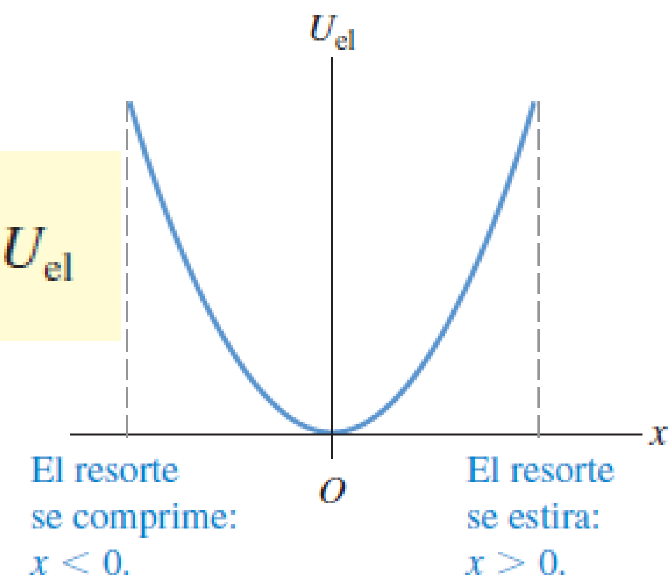


El resorte se estira más y el bloque se frena. Si x_1 y x_2 son positivos y $x_2 < x_1$ (figura 7.13c), el trabajo del resorte es positivo al relajarse y el bloque se acelera. Si el resorte puede comprimirse o estirarse, x_1 o x_2, o ambos, pueden ser negativos; sin embargo, la expresión para W_{el} sigue siendo válida. En la figura 7.13d, x_1 y x_2 son negativos, pero x_2 lo es menos; el resorte comprimido efectúa trabajo positivo al relajarse, acelerando al bloque.

Como hicimos con el trabajo gravitacional, podemos expresar el trabajo del resorte en términos de una cantidad dada al principio y al final del desplazamiento. Esta cantidad es $\frac{1}{2}kx^2$, que definimos como la **energía potencial elástica**:

$$U_{el} = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{(energía potencial elástica)} \tag{7.9}$$

7.14 La gráfica de la energía potencial elástica para un resorte ideal es una parábola: $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$, donde x es la extensión o compresión del resorte. La energía potencial elástica U_{el} nunca es negativa.



$$W_{el} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = U_{el,1} - U_{el,2} = -\Delta U_{el}$$

CUIDADO **Energía potencial gravitacional contra energía potencial elástica** Una diferencia importante entre la energía potencial gravitacional $U_{grav} = mgy$ y la energía potencial elástica $U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$ es que *no* tenemos la libertad de elegir $x = 0$ donde queramos. Para que sea congruente con la ecuación (7.9), $x = 0$ *debe* ser la posición donde el resorte no está ni estirado ni comprimido. Ahí, su energía potencial elástica y la fuerza que ejerce son ambas cero.

Energía Potencial Elástica
x_0=0 (que es la posición de equilibrio)

El teorema trabajo-energía dice que $W_{tot} = K_2 - K_1$ sin importar qué tipo de fuerzas actúen sobre el cuerpo. Si la fuerza elástica es la *única* que realiza trabajo sobre el cuerpo, entonces,

$$W_{tot} = W_{el} = U_{el,1} - U_{el,2}$$

El teorema trabajo-energía $W_{tot} = K_2 - K_1$ nos da así

$$K_1 + U_{el,1} = K_2 + U_{el,2} \quad \text{(si sólo la fuerza elástica realiza trabajo)} \qquad (7.11)$$

Aquí, U_{el} está dada por la ecuación (7.9), por lo que

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2} \quad \text{(si sólo la fuerza elástica realiza trabajo)} \tag{7.12}$$

En este caso, la energía mecánica total $E = K + U_{el}$ (la suma de las energías potenciales cinética y *elástica*) se *conserva*.