Ejercicios de Movimiento Circular

MC-Una partícula recorre una circunferencia de 0,5 m de radio, parte desde el reposo con aceleración angular constante de $\pi/2 \ 1/s^2$. Luego de un instante **"t_A"** la partícula pasa por el punto "A" y en un segundo más tarde gira un cuarto de vuelta adicional.

a) Hallar "**t_A**" (en s).
b) ¿Cuál es el módulo de la aceleración de la partícula al tiempo "**t_A**"?

❖ **Entendemos el enunciado:**

- Una partícula recorre una circunferencia de 0,5 m de radio, parte desde el reposo con aceleración angular constante de $\pi/2 \ 1/s^2$.

  ➔ $\omega=0$ (parte del reposo) ;
  ➔ γ (aceleración angular)= $\pi/2 \ 1/s^2$.

- Luego de un instante **"t_A"** la partícula pasa por el punto "A" ≡ $\Theta(\mathbf{t_A})$
- Y en un segundo más tarde gira un cuarto de vuelta adicional ➔$\Delta t = 1s$

  ➔ $\Theta(\mathbf{t_A} + \Delta t) = \Theta(\mathbf{t_A}) + \frac{1}{4} \cdot 2\pi$

❖ Ecuaciones horarias MCUV (**HOJA DE FORMULAS**)

γ= constante; $\omega(t)=\omega_0+\gamma(t-t_0)$; $\theta(t)=\theta_0+\omega_0(t-t_0)+\frac{\gamma}{2}(t-t_0)^2$

❖ **<u>Desarrollo</u>:** Cálculo de t_A

- Si consideramos $t_0 = 0$ al instante inicial cuando parte del reposo ➔ $\omega(t_0) = \omega_0 = 0$

$$\theta(t)=\frac{\gamma}{2}t^2 \qquad y \qquad \omega(t)=\gamma t$$

- La posición en el instante t_A sería: $\theta(t_A)=\frac{\gamma}{2}t_A^2$
- La posición un tiempo Δt después de t_A sería: $\theta(t_A+\Delta t)=\frac{\gamma}{2}(t_A+\Delta t)^2$
- Si restamos estas dos ecuaciones:

$$\theta(t_A+\Delta t)-\theta(t_A)=\frac{\gamma}{2}(t_A+\Delta t)^2-\frac{\gamma}{2}t_A^2$$

- Podemos despejar t_A, que era lo que se pedía: Llamamos $\Delta\theta \equiv \theta(t_A + \Delta t) - \theta(t_A)$

$$\Delta\theta=\frac{\gamma}{2}\left[\left(t_A^2+\Delta t^2+2t_A\Delta t\right)-t_A^2\right] \ ; \ \Delta\theta=\frac{\gamma}{2}\left(\Delta t^2+2t_A\Delta t\right) \quad \rightarrow \quad \frac{2\Delta\theta}{\gamma}-\Delta t^2=2t_A\Delta t$$

<u>Datos:</u> *- Tema A: $\Delta t = 1s$; $\Delta\theta = 2\pi/4$ y $\gamma= \pi/2 \ s^{-2;}$ R =0,5 m* ➔ *t_A= 0,5 s*

<u>Datos</u> *:- Tema B : $\Delta t =1s$; $\Delta\theta = 2\pi/2$ y $\gamma= \pi \ s^{-2}$; R =0,5 m* ➔ *t_A= 0,5 s*

(b) Módulo de la aceleración en el instante t_A

La aceleración de la partícula tiene las componentes centrípeta (a_C) y tangencial (a_T), al tiempo $\mathbf{t_A}$, que pueden calcularse:

$$a_C = \omega^2 R \qquad \textbf{y} \qquad a_T = \gamma R$$

La aceleración angular γ es constante y es dato. Lo que falta calcular es la velocidad angular ω en el instante t_A. Para eso, usamos la ecuación horaria correspondiente, evaluada en t_A: $\omega_A = \gamma t_A$

Entonces: $a_c = [\omega\ (t_A)]^2\ R = a_C = (\gamma t_A)^2\ R$

Luego, el módulo de la aceleración es $|\vec{a}| = \sqrt{a_C^2 + a_T^2}$

Datos: *$\Delta t = 1s$; $\Delta\theta = 2\pi/4$ y $\gamma = \pi/2\ s^{-2}$; $R = 0{,}5\ m$* → **$|a| = 0{,}84\ m/s^2$**

Datos: *$\Delta t = 1s$; $\Delta\theta = 2\pi/2$ y $\gamma = \pi\ s^{-2}$; $R = 0{,}5\ m$* → **$|a| \sim 2\ m/s^2$**

MC- Un ventilador de 20 cm de radio que giraba a 600 r.p.m., se desconecta y se detiene en 8 s. Suponiendo que la aceleración angular, durante los 8s es constante, calcular:
a) Su aceleración angular
b) Las vueltas que da hasta detenerse.

❖ **Entendemos el enunciado:**

- Un ventilador de 20 cm de radio que giraba a 600 r.p.m.
  - ✓ Nos estan dando la frecuencia
  - ✓ Dice que gira a 600 vueltas en 60 segundos
  - ✓ Recordemos las definiciones de (HOJA de FÓRMULAS)
    Frecuencia ≡ *f:* Número de vueltas que da en 1segundo.
    Periodo ≡ τ: Tiempo que tarda en dar una vuelta (sólo para MCU)
    Velocidad angular ≡ $\omega_0 = 2\,\pi f = 2\pi/\tau$

- Luego nos dice que se desconecta, eso quiere decir que $\omega_0 \neq \omega(t)$, comenzará a disminuir.
- Aparecerá una aceleración angular $\gamma < 0$
- Y además nos dice que se detiene a los 8 s → $\omega(t{=}8s) = 0$

❖ Ecuaciones horarias MCUV (**HOJA DE FORMULAS**)

γ = constante;

$$\omega(t) = \omega_0 + \gamma(t - t_0);$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{\gamma}{2}(t - t_0)^2$$

$\boldsymbol{a}_C\,(t) = [\omega(t)]^2\,R$ y $\boldsymbol{a}_T = \gamma R$

(1) Calculamos ω_0

- ✓ Si da 600 vueltas en 60s (en minuto) → da 10 vueltas en 1segundo → $f = 10\ s^{-1}$

  $\omega_0 = 2\,\pi f = 20\,\pi\ s^{-1}$

- ✓ Otra forma calculo el periodo, o sea averiguo cuánto tarda en dar una vuelta:

  Si tarda 60 s en dar 600 vueltas tardará 1/10 seg en dar 1 vuelta.

  $\omega_0 = 2\,\pi/\tau = 2\pi\ /\ (0{,}1\ s) = 20\,\pi\ s^{-1}$

(2) Calculemos γ

- ✓ Tomando $t_0 = 0s$ cuando se lo desconecta y t =8s cuando se para , calculamos γ

  $\omega\ (t{=}8s) = 0 = \omega_0 + \gamma\ (t - t_0)$

  $\omega\ (t{=}8s) = 0 = 20\,\pi\ s^{-1} + \gamma\ 8\ s$ → $\gamma = -\ 20/8\,\pi\ s^{-2} = -\ 5/2\,\pi\ s^{-2}$

(3) Calculemos *$\Delta\theta$*

- ✓ Para calcular las vueltas que da hasta detenerse, usamos:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 (t - t_0) + \frac{\gamma}{2}(t - t_0)^2$$

Teniendo en cuenta, como antes*:* $t_0 = 0s$ cuando se lo desconecta y $t = 8s$ cuando se para:

$\Delta\,\theta([8\,s,0]) = \theta(t{=}8s) - \theta(t{=}0s) = \omega_0\, t + \frac{1}{2}\gamma\, t^2 = 20\,\pi\, s^{-1}\, t - 5/4\,\pi\, s^{-2}\, t^2$

$\Delta\,\theta([8\,s,0]) = 160\,\pi - 5/4\,\pi\; 64 = 160\,\pi - 80\,\pi = 80\,\pi \rightarrow$ 40 vueltas

MC- Un móvil realiza un movimiento circular uniformemente variado de radio **0,7m** y aceleración angular **π/7 s^{-2}.** En el **cuarto** segundo de su trayectoria recorre un 1/4 de vuelta. Hallar:

a) la velocidad angular en el instante t=0s

b) el módulo de la velocidad a t=4s.

- **Entendemos el enunciado:**
- Un móvil realiza un movimiento circular uniformemente variado de radio **R** y aceleración angular γ

→ $\Omega(t=t_0 \equiv 0s) \equiv \omega_0$ (atención NO dice que parte del reposo) ;
→ γ = aceleración angular
→ $t_f \equiv$ " **4to** " segundo

- Aclaremos, que significa el 1er segundo, o tercer segundo o cuarto segundo.

→ El 1er segundo es el que transcurre entre 0s y 1s;
→ El 3er segundo es el que transcurre entre 2s y 3 s ...

- En el **cuarto segundo** de su trayectoria recorre **un ¼ (η) de vuelta**$\equiv 2\pi\, \eta$

  Estamos identificando con η a la fracción de 2 π que recorre, para que después podamos usar nuestro resumen para todos los temas de parcial.

- $\Theta(\mathbf{t}= t_f)$- $\Theta(\mathbf{t}= t_{f-1}) \equiv \Delta\ \Theta[\mathbf{t_f; t_{f-1}}] \equiv 2\pi\, \eta$

- Ecuaciones horarias MCUV (**HOJA DE FORMULAS**)

  γ= constante **(+)** $\omega(t)=\omega_0+\gamma(t-t_0)$ **(+)** $\theta(t)=\theta_0+\omega_0(t-t_0)+\frac{\gamma}{2}(t-t_0)^2$

- <u>Desarrollo</u>:

  $\Delta\ \Theta[\mathbf{t_f; t_{f-1}}] \equiv 2\pi\, \eta = \omega(t=t_{f-1})\ \ [t_f - (t_f-1)]\ \ + ½\, \gamma\ \ [t_f - (t_f-1)]^2$

  $\omega(t=t_{f-1}) = \omega_0 + \gamma\ (t_{f-1} - t_0)$ con $t_0 = 0s$

  $\omega(t=t_{f-1}) = \omega_0 + \gamma\ t_{f-1}$

<u>Datos-TA</u>: $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\pi/7}\ \mathbf{s^{-2}}$ **; $\Delta\ \Theta$[4s; 3s]** = 2π ¼ **; R** = 0,7 m, cuarto segundo → t_f= 4s y t_{f-1}=3s

$\Delta\ \Theta$[**4s;3s**]$\equiv \pi$ **/2** = ω(t=3s) 1 s + ½ **π/7** 1 s^2 → ω(t=3s) =[π **/2** - ½ **π/7]** **/(1s)** = *6/14* π *s^{-1}*

$\omega(t=t_{f-1})$ = *6/14* π *s^{-1}* = $\omega_0 + \gamma\ t_{f-1}$ → *6π/14 s^{-1}* - π /7s^{-2} · *3s*= ω_0 = 0 *s^{-1}*

v(t=4s) = *ω(t=4s) · R* = γ *4s = 4/7* π *s^{-1} · 0,7m =* 4π/10 *m/s*= 2π/5 *m/s*

v(t=5s) = π/2 *m/s*

Datos-TB: $\gamma = \pi/9\ s^{-2}$; $\Delta\ \Theta[4s;\ 3s] = 2\pi\ \frac{1}{4}$; R = 0,9 m, quinto segundo $\rightarrow t_f = 5s$ y $t_{f-1}=4s$

$\Delta\ \Theta[\mathbf{5s;4s}] \equiv \pi\ /\mathbf{2} = \omega(\ t=4s)\ 1\ s + \frac{1}{2}\ \boldsymbol{\pi/9}\ \ 1\ s^2 \rightarrow \omega(\ t=4s) = [\ \pi\ /\mathbf{2} - \frac{1}{2}\ \boldsymbol{\pi/9}]\ /(\mathbf{1s}) = 8/18\ \pi\ \ s^{-1}$

$\omega(\ t=t_{f-1=}4s)\ =\ 8/18\ \pi\ \ s^{-1}\ =\ \omega_0 + \gamma\ \ t_{f-1}\ \rightarrow 8\pi\ /18\ \ s^{-1} - \pi\ /9s^{-2}\ \cdot\ 4s = \omega_0\ = 0\ \ s^{-1}$

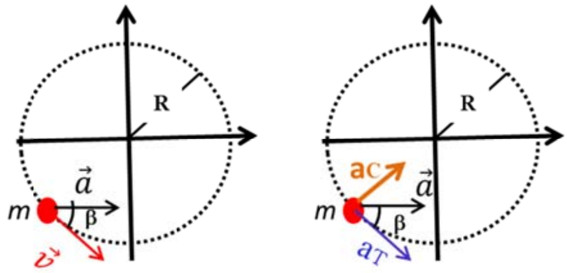
$v(t=4s) =\ \omega(\ t=4s)\cdot R\ = \gamma\ \ 4s = 4/9\ \ \pi\ \ s^{-1}\cdot 0{,}9m =\ \ 4\pi/10\ \ \ m/s = 2\pi/5\ \ \ m/s$

$v(t=5s) =\ \pi/2\ \ \ m/s$

MC- Una partícula parte del reposo recorriendo una circunferencia de **20 cm** de radio con una aceleración tangencial de módulo constante igual a **5** cm/s^2.

a) ¿Cuál es el lapso de tiempo, después de haber partido, la aceleración total de la partícula forma un ángulo de 45º con su velocidad?

b) ¿Cuál fue su desplazamiento angular en ese tiempo?



- ❖ **Entendemos el enunciado** (mirar el gráfico)
  - Una partícula parte del reposo con una aceleración tangencial $\mathbf{a_T}$ de módulo constante igual a **5** cm/s^2

    El dato es a_T: ¿Qué sabemos de $\mathbf{a_T}$?
    - ✓ Que es paralela a la velocidad
    - ✓ Que si existe entonces el movimiento circular NO es uniforme, o sea existe una aceleración angular $\boldsymbol{\gamma}$.
    - ✓ Y que se relaciona con $\boldsymbol{\gamma}$ a través de la ecuación $\mathbf{a_T} = \boldsymbol{\gamma}\,\mathbf{R}$ (hoja de fórmulas)
  - Cuál es el lapso de tiempo, después de haber partido, la <u>aceleración total</u> de la partícula forma un ángulo de 45º con su velocidad?

    Acá nos dan un dato fundamental! : Nos dicen que la aceleración total, $\boldsymbol{a}$, de la partícula forma un ngulo de 45 grados con la velocidad v.

❖ Ecuaciones horarias MCUV (**HOJA DE FORMULAS**)

γ = constante;

$$\omega(t) = \omega_0 + \gamma(t - t_0);$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{\gamma}{2}(t - t_0)^2$$

$$a_C(t) = [\omega(t)]^2 R \quad y \quad a_T = \gamma R$$

❖ <u>**Desarrollo:**</u> sabiendo que $\boldsymbol{\omega_0}(t_0=0) = 0$ dado que parte del reposo.

- $a_T = \gamma R \quad \rightarrow \quad \gamma = a_T / R$ **(1)**

Si la aceleración total, $\boldsymbol{a}$, forma un ángulo de 45° con v →

Como a_T //V → $\boldsymbol{a}$ forma un ángulo de 45° con a_T.

Y además $\boldsymbol{a}$ forma un ángulo de 45° con a_C, dado que a_T(v) .es perpendicular a a_C.

- $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_T$ **(1)**
- $a_C = a \;\text{sen}\, 45$ $a_T = a \;\cos 45$ y dado que sen 45°= cos 45° → $|\, \boldsymbol{a}_C \,| = |\, \boldsymbol{a}_T \,|$
- $a_C\,(t) = a_T$ **(2)**
- $a_C\,(t) = [\omega(t)]^2\, R = \gamma^2\, t^2\, R$ **(3)**
- $\Delta\theta\,(t) = \frac{1}{2}\,\gamma\; t^2$ **(4)**

<u>Datos- Tema 1</u>: $R = 20$ cm ; $a_T = 5$ cm/s^2; $\beta = 45°$

→ De **(1)** $\gamma = \boldsymbol{a}_T / R = \frac{1}{4}\, s^{-2}$ **(5)**

→ De **(2)** $a_C\,(t) = 5$ cm/s^2; usando **(3)** y **(5)** → $[\omega(t)]^2\, R]$ → $[\omega(t)]^2 = \frac{1}{4}\, s^{-2} = \gamma^2\, t^2 = 1/16\, s^{-2}\, t^2$
→ $t = 2s$

→ De **(4)** $\Delta\theta\,(t{=}2s) = \frac{1}{2}$ rad= 0,5 radianes.

<u>Datos- Tema 2</u>: $R = 18$ cm ; $a_T = 2$ cm/s^2; $\beta = 45°$

→ De **(1)** $\gamma = \boldsymbol{a}_T / R = 1/9\, s^{-2}$ **(5)**

→ De **(2)** $a_C\,(t) = 2$ cm/s^2; usando **(3)** y **(5)** → $[\omega(t)]^2\, R]$ → $[\omega(t)]^2 = 1/9\, s^{-2} = \gamma^2\, t^2 = 1/81\, s^{-2}\, t^2$
→ $t = 3s$

→ De **(4)** $\Delta\theta\,(t{=}3s) = \frac{1}{2}$ rad= 0,5 radianes.