

En general para calcular integrales definidas no utilizaremos fórmulas de áreas sino una regla muy útil.

Regla de Barrow

La **regla de Barrow** nos permite calcular integrales definidas:

Sea F una primitiva (cualquiera) de f . Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Por ejemplo, si queremos calcular $\int_{-2}^1 5x dx$ usando la regla de Barrow, primero tenemos que buscar una primitiva de $f(x) = 5x$:

$$\int 5x dx = 5 \cdot \int x dx = 5 \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

Tomamos cualquier primitiva de f , por ejemplo $F(x) = 5 \cdot \frac{x^2}{2}$ (cuando elegimos $C = 0$).

Entonces, la regla de Barrow dice que

$$\int_{-2}^1 5x dx = F(1) - F(-2) = 5 \cdot \frac{1^2}{2} - 5 \cdot \frac{(-2)^2}{2} = \frac{5}{2} - 10 = -\frac{15}{2}$$

que es el mismo resultado que habíamos obtenido antes calculando la integral como resta de áreas.

Supongamos que elegimos otra primitiva de f , por ejemplo $G(x) = 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 1$ (cuando elegimos $C = 1$). En este caso, la regla de Barrow nos asegura que

$$\int_{-2}^1 5x dx = G(1) - G(-2) = 5 \cdot \frac{1^2}{2} + 1 - (5 \cdot \frac{(-2)^2}{2} + 1) = \frac{7}{2} - 11 = -\frac{15}{2}.$$

Notar que, no importa qué primitiva elijamos, la integral definida da lo mismo.

Una notación usual para la resta $F(b) - F(a)$ es

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Por ejemplo,

$$5 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 = 5 \cdot \frac{1^2}{2} - 5 \cdot \frac{(-2)^2}{2} = -\frac{15}{2}.$$

Ejemplo. Calcular $\int_0^\pi \text{sen}(x) dx$.

Para poder aplicar la regla de Barrow, tenemos que calcular una primitiva de $\text{sen}(x)$:

$$\int \text{sen}(x) dx = -\cos(x) + C.$$

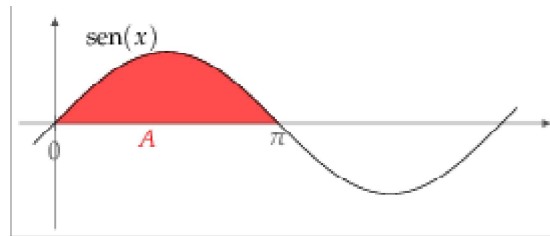
Ahora elegimos una primitiva de $\text{sen}(x)$, por ejemplo $-\cos(x)$ si tomamos $C = 0$. La regla de Barrow nos asegura que

$$\int_0^\pi \text{sen}(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2,$$

es decir

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(x) dx = 2.$$

Notar que, como la función seno es positiva o cero en el intervalo $[0; \pi]$, lo que calculamos en el ejemplo anterior es el área **A** sobreada en la siguiente figura:



A continuación enunciaremos algunas propiedades útiles para las integrales definidas:

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$
- $\int_a^b (k \cdot f(x)) dx = k \int_a^b f(x) dx$ para k número real fijo.
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

Ejemplo. Sabiendo que $\int_{-1}^4 (2 \cdot f(x) + 3) dx = 5$, calcular $\int_{-1}^4 f(x) dx$.

Por las propiedades anteriores, sabemos que

$$\int_{-1}^4 (2 \cdot f(x) + 3) dx = \int_{-1}^4 2 \cdot f(x) dx + \int_{-1}^4 3 dx = 2 \cdot \int_{-1}^4 f(x) dx + \int_{-1}^4 3 dx.$$

Podemos calcular esta última integral por medio de la regla de Barrow: como $3x$ es una primitiva de 3 , resulta que

$$\int_{-1}^4 3 dx = 3x \Big|_{-1}^4 = 3 \cdot 4 - 3 \cdot (-1) = 15.$$

Luego tenemos que

$$5 = \int_{-1}^4 (2 \cdot f(x) + 3) dx = 2 \cdot \int_{-1}^4 f(x) dx + 15.$$

Despejando en la igualdad anterior, tenemos que

$$\frac{5 - 15}{2} = \int_{-1}^4 f(x) dx$$

con lo que

$$\int_{-1}^4 f(x) dx = -5.$$