

Luego, el área total pedida será:

$$A = \int_0^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx.$$

Calculando primitivas para $-x^2 + 1$ y $x^2 - 1$ y usando la regla de Barrow, tenemos que

$$A = \left(-\frac{1}{3}x^3 + x \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{3}1^3 + 1 - 0 + \frac{1}{3}2^3 - 2 - \left(\frac{1}{3}1^3 - 1 \right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right)$$

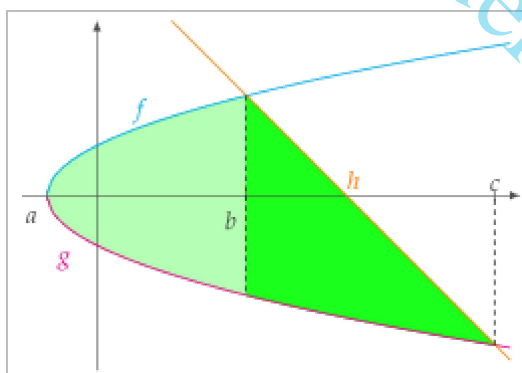
con lo que el área pedida será

$$A = 2.$$

Con las herramientas que contamos ahora, podemos calcular áreas de regiones delimitadas por gráficos de funciones en otras situaciones.

Ejemplo. Calcular el área de la región delimitada por los gráficos de $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = -\sqrt{x+1}$ y $h(x) = -x + 5$.

En este caso conviene hacer un gráfico primero para entender la situación:



Para calcular esta área, podemos pensar en partirla en dos: primero, calcular el área encerrada por los gráficos de f y g desde la abscisa a del punto en que se cortan hasta b donde f y h valen lo mismo; luego, calcular el área desde ese valor b hasta c , que es la abscisa del punto donde se cortan los gráficos de h y g y finalmente, sumar estas dos áreas.

Primero busquemos los valores de a , b y c en cuestión.

El valor a es la abscisa del punto donde f y g coinciden:

$$\sqrt{x+1} = -\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

El valor b es la abscisa del punto donde el gráfico de f se corta con el de h :

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} = -x+5 &\Leftrightarrow x+1 = (-x+5)^2 \text{ y } -x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x+1 = x^2 - 10x + 25 \text{ y } 5 \geq x \\ &\Leftrightarrow 0 = x^2 - 11x + 24 \text{ y } 5 \geq x \Leftrightarrow (x=3 \text{ o } x=8) \text{ y } 5 \geq x \Leftrightarrow x=3.\end{aligned}$$

El valor c es la abscisa del punto donde el gráfico de h se corta con el de g :

$$\begin{aligned}-\sqrt{x+1} = -x+5 &\Leftrightarrow x+1 = (-x+5)^2 \text{ y } -x+5 \leq 0 \Leftrightarrow x+1 = x^2 - 10x + 25 \text{ y } 5 \leq x \\ &\Leftrightarrow 0 = x^2 - 11x + 24 \text{ y } 5 \leq x \Leftrightarrow (x=3 \text{ o } x=8) \text{ y } 5 \leq x \Leftrightarrow x=8.\end{aligned}$$

Con todo esto, tenemos que el área buscada será

$$\begin{aligned}A &= \int_{-1}^3 (f(x) - g(x)) dx + \int_3^8 (h(x) - g(x)) dx = \\ &= \int_{-1}^3 (\sqrt{x+1} - (-\sqrt{x+1})) dx + \int_3^8 (-x+5 - (-\sqrt{x+1})) dx = \int_{-1}^3 2\sqrt{x+1} dx + \int_3^8 (-x+5 + \sqrt{x+1}) dx\end{aligned}$$

Calculando las primitivas correspondientes (¡queda como ejercicio para el lector!) y aplicando la regla de Barrow tenemos que

$$A = \left(\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{-1}^3 + \left(-\frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_3^8 = \frac{32}{3} - 0 + 26 - \frac{95}{6}$$

con lo que el área buscada es

$$A = \frac{125}{6}.$$