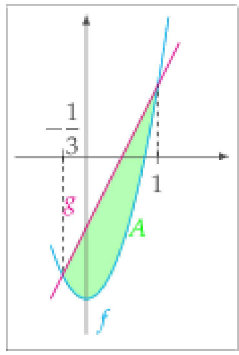


Entonces, el área a calcular es

$$A = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(2x - 1 - (3x^2 - 2)\right) dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{1} \left(-3x^2 + 2x + 1\right) dx = \left(-x^3 + x^2 + x\right) \Big|_{-\frac{1}{3}}^{1} = (-1+1+1) - \left(-(-\frac{1}{3})^3 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3})\right)$$

con lo que

$$\boxed{A = \frac{32}{27}.}$$

Ejemplo. Calcular el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = 4x^3$ y $g(x) = 4x$.

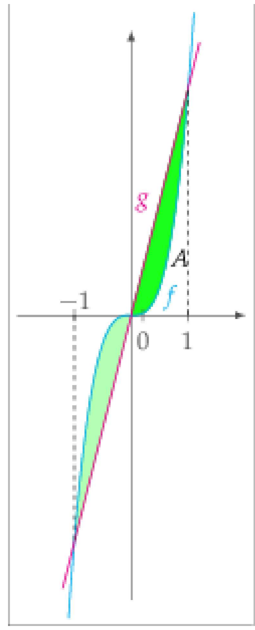
Primero calculamos los valores de x donde los gráficos de las funciones se cortan:

$$4x^3 = 4x \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = 1 \text{ ó } x = -1.$$

Ahora vamos a usar el corolario del Teorema de Bolzano para hacer una tabla que muestre qué pasa con f y g en cada intervalo delimitado por estos valores de x:

x	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1
f	-4	$f(-0,5) = -0,5$	0	$f(0,5) = 0,5$	4
g	-4	$g(-0,5) = -2$	0	$g(0,5) = 2$	4
luego		$f > g$		$f < g$	

Podemos hacer ahora un gráfico aproximado de la situación:



Entonces, el área de la región encerrada entre los gráficos resulta ser

$$A = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{0}^{1} (g(x) - f(x))\,dx = \int_{-1}^{0} \left(4x^3 - 4x\right) dx + \int_{0}^{1} \left(4x - 4x^3\right) dx$$
$$= (x^4 - 2x^2)\Big|_{-1}^{0} + (2x^2 - x^4)\Big|_{0}^{1} = 0 - (1-2) + (2-1) - 0$$

con lo que

$$\boxed{A = 2.}$$

Usando integrales definidas podemos calcular también áreas delimitadas por gráficos funciones pero entre dos valores de la abscisa x.

Ejemplo. Calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x^2$ para $0 \leq x \leq 2$.

Como siempre, primero calculamos los valores de x donde los gráficos de las funciones se cortan:

$x^2 + 1 = 2x^2 \Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ó } x = 1.$

Como el área que nos interesa está dada por los valores de x entre 0 y 2, de los valores obtenidos sólo nos interesa $x = 1$.

Hagamos una tabla para ver cómo se comportan f y g en el intervalo $[0;2]$:

x	$[0;1)$	1	$(1;2]$
f	$f(0) = 1$	$f(1) = 2$	$f(2) = 5$
g	$g(0) = 0$	$g(1) = 2$	$g(2) = 8$
luego	$f > g$		$f < g$

Podemos ver esta situación en el siguiente gráfico: