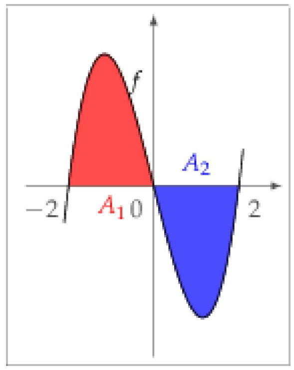


Es decir, el área a calcular está dada por

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx - \int_{0}^{2} (x^3 - 4x)\, dx.$$

Calculamos ahora una primitiva de $x^3 - 4x$ y aplicamos la regla de Barrow, y nos queda

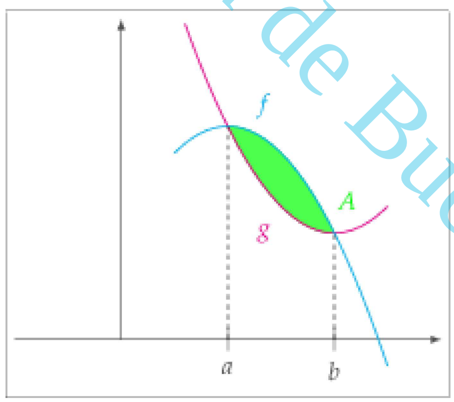
$$A = \left((\frac{1}{4}x^4 - 2x^2)\Big|_{-2}^{0} \right) - \left((\frac{1}{4}x^4 - 2x^2)\Big|_{0}^{2} \right) = \left(0 - (\frac{1}{4}(-2)^4 - 2(-2)^2) \right) - \left((\frac{1}{4}2^4 - 2.2^2) - 0 \right) = 4 - (-4)$$

con lo que

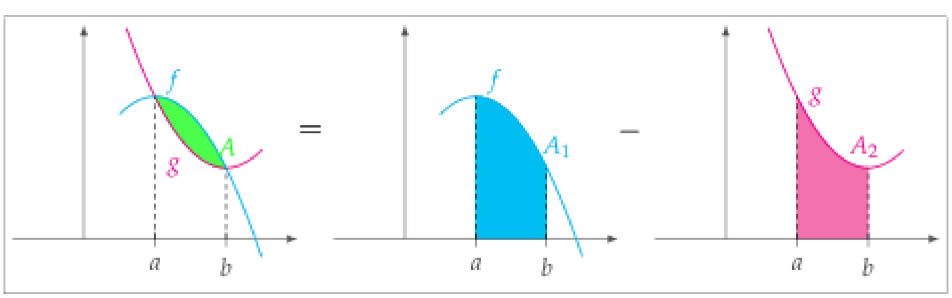
$$\boxed{A = 8.}$$

Cálculo de área entre el gráfico de dos funciones

Supongamos que tenemos dos funciones f y g que toman valores positivos y queremos calcular el área de la región encerrada entre sus gráficos. Veamos primero el caso del siguiente gráfico:



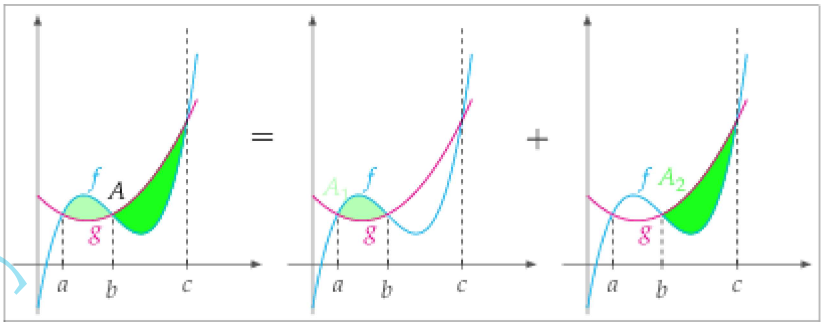
En este caso, $A_1 = \int_a^b f(x)dx$ nos da el área encerrada entre el gráfico de f y el eje x para $a \leq x \leq b$ y $A_2 = \int_a^b g(x)dx$ nos da el área encerrada entre el gráfico de g y el eje x para $a \leq x \leq b$. El área A resulta ser la diferencia entre estas dos áreas:



Por lo tanto, el área A buscada es

$$A = A_1 - A_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

Veamos ahora otro ejemplo:



En este caso, el área pedida A es la suma de dos áreas. Usando lo que vimos antes, la primera está dada por $A_1 = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$ y la otra está dada por $A_2 = \int_b^c (g(x) - f(x))\, dx$. Por lo tanto, tenemos que

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx + \int_b^c (g(x) - f(x))\, dx.$$

Para calcular en general el área de la región encerrada entre los gráficos de dos funciones f y g, sin importar si son positivas, negativas o cero, tenemos que buscar los valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$. Una vez calculados estos valores, para cada par de valores a y b consecutivos, nos fijamos qué función es mayor en el intervalo $(a;b)$. Si $f(x) > g(x)$ en el intervalo $(a;b)$, el área está dada por $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$. Si $f(x) < g(x)$ en el intervalo $(a;b)$, el área está dada por $\int_a^b (g(x) - f(x))dx$. Una vez calculada el área para cada intervalo, el área total se obtiene sumando las áreas obtenidas.

Observamos que determinar si $f(x) > g(x)$ o $f(x) < g(x)$ es equivalente a ver si $f(x) - g(x) > 0$ o $f(x) - g(x) < 0$, es decir, estudiar la positividad o negatividad de la función $f - g$. Entonces, si f y g son funciones continuas en un intervalo $(a;b)$ en el cual sus gráficos no se intersecan (y, por lo tanto, $f(x) - g(x) \neq 0$ para todo $x \in (a;b)$), por el corolario del Teorema de Bolzano, para ver cuál de ellas es mayor en todo el intervalo, bastará comparar los valores que toman en un punto cualquiera de $(a;b)$.

Ejemplo. Calcular el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = 3x^2 - 2$ y $g(x) = 2x - 1$.

Primero calculamos valores de x para los cuales $f(x) = g(x)$:

$$3x^2 - 2 = 2x - 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ó } x = -\frac{1}{3}.$$

Es decir, los valores de x que delimitan el área son $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 1$. Para ver qué función es mayor en el intervalo $(-\frac{1}{3};1)$, por el corolario del Teorema de Bolzano, basta ver qué función es mayor en un punto del intervalo. Por ejemplo, tomemos el valor 0: $f(0) = -2$ y $g(0) = -1$, por lo que $f(x) < g(x)$ en el intervalo $(-\frac{1}{3};1)$. Un gráfico aproximado de la situación es el siguiente: