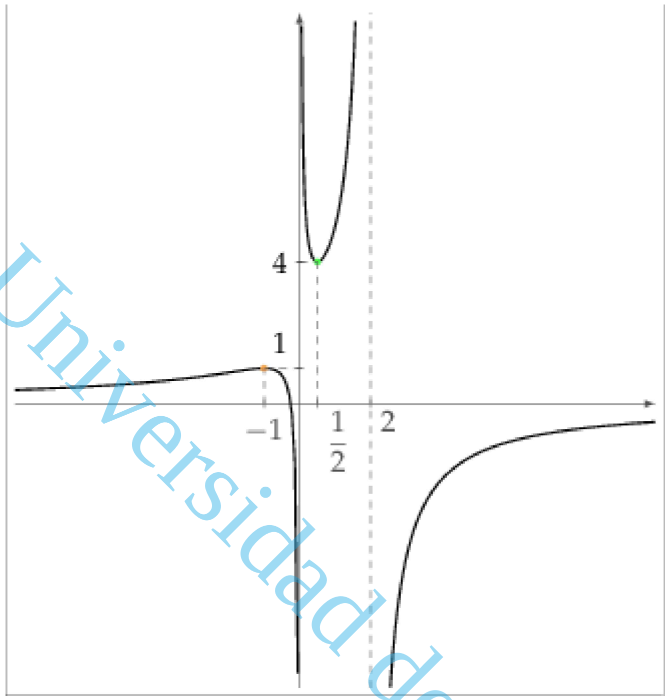
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x+1}{-x^2+2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(4+\frac{1}{x})}{x^2(-1+\frac{2}{x})} = 0, \lim_{x\to+\infty} \frac{4x+1}{-x^2+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(4+\frac{1}{x})}{x^2(-1+\frac{2}{x})} = 0$$

Concluimos entonces que las asíntotas de f son:

$$\boxed{\text{Asíntotas verticales: } x=0 \text{ y } x=2, \quad \text{Asíntota horizontal: } y=0}$$

Con toda la información anterior, podemos construir un gráfico aproximado de f (se puede ver la animación sobre el dibujo del gráfico de f):



Ejemplo 3. Sea $f(x) = e^{-x^2+4x-3}$. Hallar el dominio de f, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y mínimos relativos y las asíntotas. Hacer un gráfico aproximado de f.

Observamos que f es una composición de una función polinomial con una exponencial, que tienen ambas a $\mathbb{R}$ como dominio; luego,

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}}$$

Para continuar con el estudio de f, calculamos su derivada. Aplicando la regla de la cadena, obtenemos:

$$f'(x) = e^{-x^2+4x-3}.(-2x+4)$$

Los puntos críticos de f son los ceros de f'. Como $e^{-x^2+4x-3} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, resulta que

$$f'(x) = 0 \iff -2x+4=0 \iff x=2$$

Efectuamos ahora el estudio de los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f y de sus extremos locales. Por el criterio de la primera derivada y el corolario del teorema de Bolzano, como f' es continua en todo $\mathbb{R}$, basta analizar los dos intervalos determinados por el punto crítico $x=2$ (ya que en cada uno de ellos f' no se anula):

x	$(-\infty;2)$	2	$(2;+\infty)$
	$f'(0)>0$		$f'(3)<0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(2)=e$ max	$\searrow$

En consecuencia, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f son:

$$\boxed{I^{\uparrow}:(-\infty;2),\quad I_{\downarrow}:(2,+\infty)}$$

y tiene un único extremo local:

$$\boxed{f \text{ tiene un máximo local en } x=2}$$

Dado que f es continua en todo $\mathbb{R}$,

$$\boxed{f \text{ no tiene asíntotas verticales}}$$

Finalmente, estudiemos las asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\overbrace{-x^2+4x-3}^{\to-\infty}}=0,\qquad \lim_{x\to+\infty} e^{\overbrace{-x^2+4x-3}^{\to-\infty}}=0$$

(recordar que la función exponencial tiene asíntota horizontal $y=0$ en $-\infty$). Por lo tanto:

$$\boxed{\text{Asíntota horizontal: } y=0}$$

Para terminar, realizamos un gráfico aproximado de f teniendo en cuenta la información obtenida: