Ejemplo 2. Sea $f(x) = \dfrac{4x+1}{-x^2+2x}$. Hallar el dominio de f, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y mínimos relativos y las asíntotas. Hacer un gráfico aproximado de f.

Como f es una función dada por una división de polinomios, su dominio es el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ que no anulan al denominador. Ahora, los valores de x tales que $-x^2+2x=0$ son $x=0$ y $x=2$; luego,

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0,2\}}$$

Para estudiar el crecimiento y los extremos relativos de f calculamos su derivada. Usando la regla del cociente, obtenemos:

$$f'(x) = \frac{4.(-x^2+2x)-(4x+1)(-2x+2)}{(-x^2+2x)^2} = \frac{-4x^2+8x-(-8x^2+6x+2)}{(-x^2+2x)^2} = \frac{4x^2+2x-2}{(-x^2+2x)^2}$$

A continuación, buscamos los puntos críticos de f, hallando los ceros de f'. Estos son los $x \in \mathbb{R} - \{0,2\}$ tales que se anula el numerador de f', es decir, tales que

$$4x^2+2x-2=0 \iff x=-1 \text{ o } x=\frac{1}{2}$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, buscamos los conjuntos de positividad y negatividad de f', aplicando el corolario del teorema de Bolzano. Los extremos de los intervalos a considerar son los x *que no pertenecen al dominio de* f (y que, por lo tanto, tampoco están en el dominio de f') y los *puntos críticos de* f. Resumimos nuestro análisis en la siguiente tabla:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2};2)$	2	$(2;+\infty)$
	$f'(-2)>0$		$f'(-\frac{1}{2})<0$		$f'(\frac{1}{4})<0$		$f'(1)>0$		$f'(3)>0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-1)=1$ max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	$f(1/2)=4$ min	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$

A partir de esta tabla, obtenemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f:

$$\boxed{I^{\uparrow}: (-\infty;-1),\ (\tfrac{1}{2};2),\ (2,+\infty), \quad I_{\downarrow}: (-1;0),\ (0;\tfrac{1}{2})}$$

y sus extremos locales (recordar que éstos sólo pueden hallarse en puntos críticos de f):

$$\boxed{f \text{ tiene un máximo local en } x=-1 \text{ y un mínimo local en } x=\frac{1}{2}}$$

Calculemos ahora las asíntotas de f. Para determinar las asíntotas verticales, hallamos el límite de f en los puntos que no pertenecen a su dominio:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{4x+1}{-x^2+2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{4x+1}{x(-x+2)} = -\infty, \ \lim_{x\to 0^+} \frac{4x+1}{-x^2+2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4x+1}{x(-x+2)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{4x+1}{-x^2+2x} = \lim_{x\to 2^-} \frac{4x+1}{x(-x+2)} = +\infty, \ \lim_{x\to 2^+} \frac{4x+1}{-x^2+2x} = \lim_{x\to 2^+} \frac{4x+1}{x(-x+2)} = -\infty$$

y para determinar, si tiene, asíntotas horizontales, calculamos los límites en infinito: