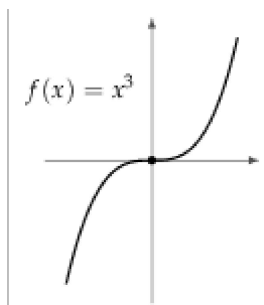
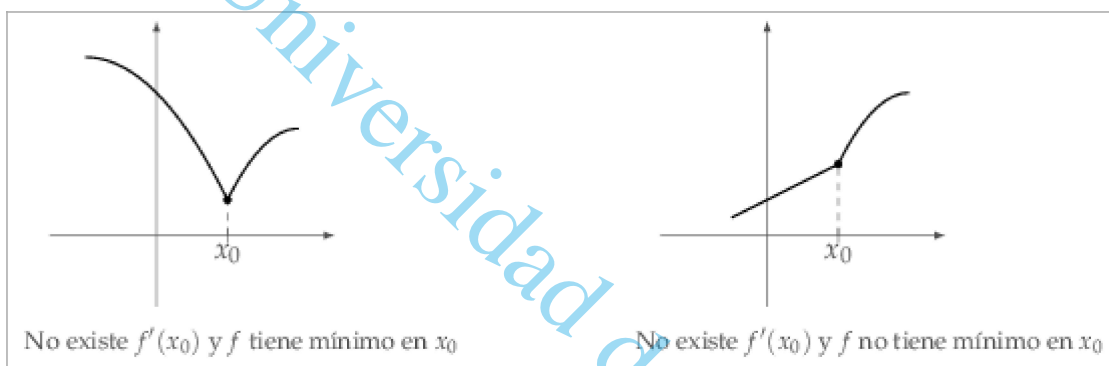


f tiene un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 1$

Es importante observar que la condición $f'(x_0) = 0$ **no alcanza** para asegurar que f tenga un extremo local en x_0 . Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, tenemos que $f'(x) = 3x^2$ que tiene un cero en $x = 0$. Sin embargo, como podemos ver en el gráfico de f , la función no tiene un máximo ni un mínimo local en $x_0 = 0$:



Por otro lado, una función f puede tener extremos locales en puntos en los cuales no es derivable, como en el primero de los gráficos siguientes. Nuevamente, debemos observar que la condición de que f no sea derivable en x_0 **no alcanza** para asegurar que f tenga un extremo relativo en x_0 , como puede verse en el segundo de los gráficos:



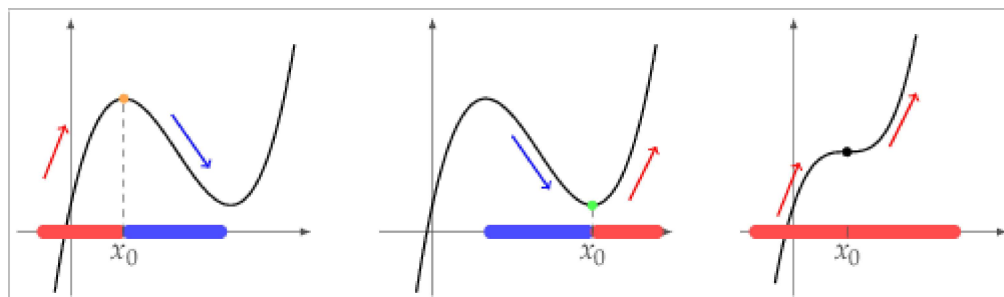
Puntos críticos para hallar extremos relativos

Como vimos anteriormente, si f es una función que tiene un extremo relativo en $x_0 \in \text{Dom}(f)$, deberá ocurrir alguna de las dos situaciones siguientes:

- $f'(x_0) = 0$
- f no es derivable en x_0

Llamaremos **puntos críticos de f** a todos los $x \in \text{Dom}(f)$ que cumplen alguna de estas dos condiciones. Estos puntos críticos son los **candidatos** a presentar máximos o mínimos relativos de f , pero como vimos, **no todo punto crítico da un máximo o mínimo local de f** .

¿Cómo podemos determinar si en un punto crítico x_0 , la función **continua** f tiene un máximo o un mínimo local (o no tiene un extremo relativo)? La presencia de un extremo relativo en x_0 está determinada por un cambio en el crecimiento de la función a la izquierda y a la derecha de x_0 , como ilustran los gráficos siguientes:



- Si f es continua en x_0 , creciente a la izquierda de x_0 y decreciente a su derecha, entonces f tiene un máximo local en x_0 .
- Si f es continua en x_0 , decreciente a la izquierda de x_0 y creciente a su derecha, entonces f tiene un mínimo local en x_0 .
- Si f es continua en x_0 , siempre creciente (o siempre decreciente), tanto a la derecha como a la izquierda de x_0 , entonces f no tiene un extremo local en x_0 .

Recordando la relación entre crecimiento y decrecimiento de f y el signo de su derivada f' , para una función continua, derivable a izquierda y a derecha de x_0 , podemos dar el siguiente criterio:

Criterio de la primera derivada.

- Si $f'(x) > 0$ a la izquierda de x_0 y $f'(x) < 0$ a la derecha de x_0 , entonces f tiene un máximo relativo en x_0 .
- Si $f'(x) < 0$ a la izquierda de x_0 y $f'(x) > 0$ a la derecha de x_0 , entonces f tiene un mínimo relativo en x_0 .
- Si $f'(x)$ tiene el mismo signo a la izquierda y a la derecha de x_0 , entonces f no tiene un máximo ni un mínimo relativo en x_0 .

Ejemplo. Sea $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3$. Hallar los extremos relativos de f .

Como f es un polinomio, es derivable en todo \mathbb{R} . Entonces, los puntos críticos de f , que serán nuestros candidatos para hallar los extremos relativos, son los $x \in \mathbb{R}$ tales que $f'(x) = 0$.

Tenemos que $f'(x) = -12x^3 + 24x^2 - 12x$. Factorizamos esta expresión para hallar sus ceros, sacando factor común $-12x$ y luego buscando las raíces de la cuadrática que se obtiene:

$$f'(x) = -12x^3 + 24x^2 - 12x = -12x(x^2 - 2x + 1) = -12x(x - 1)^2$$

Ahora $f'(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$ o $x = 1$, con lo cual

Puntos críticos de $f = \{0, 1\}$.

Para determinar si son máximos, mínimos o no son extremos relativos, aplicamos el criterio de la primera derivada, para lo cual estudiamos el signo de f' (lo que nos da los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f). Teniendo en cuenta que f' es una función continua, hallamos sus intervalos de positividad y negatividad aplicando el corolario del Teorema de Bolzano: consideramos los ceros de f' , que son $x = 0$ y $x = 1$, y estudiamos el signo de f' en los intervalos $(-\infty; 0)$, $(0, 1)$ y $(1; +\infty)$ determinados por estos puntos, en cada uno de los cuales f' tendrá signo constante.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
	$f'(-2) > 0$		$f'(0,5) < 0$		$f'(2) < 0$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	\nearrow	max	\searrow		\searrow

Concluimos que f es creciente en $(-\infty; 0)$ y decreciente en $(0; +\infty)$ (ya que es decreciente en $(0; 1)$ y $(1; +\infty)$ y es continua en $x = 1$). En consecuencia, f tiene un máximo local en $x = 0$ y no tiene mínimos locales. Notar que $x = 1$ es un punto crítico que no da lugar a un extremo local, ya que $f'(x) < 0$ (es decir, f es decreciente) tanto a izquierda como a derecha de $x = 1$.

f tiene un máximo local en $x = 0$