$$\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{1-\frac{1}{x}}^{\to 0}}{\underbrace{2e^{2x-2}-2}_{\to 0}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to 1}}{\underbrace{4e^{2x-2}}_{\to 4}} = \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln(x)}{e^{2x-2}+1-2x} = \frac{1}{4}.}$$

Variantes: La regla de L'Hôpital también puede aplicarse para calcular límites cuando $x \to \infty$ y también permite salvar indeterminaciones del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$".

Ejemplo 4. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{x^2+1}$.

Siguiendo los pasos anteriores, tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{e^{x^2}}^{\to+\infty}}{\underbrace{x^2+1}_{\to+\infty}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2x}\,\overbrace{e^{x^2}}^{\to+\infty}}{\underbrace{\cancel{2x}}_{1}} = +\infty.$$

Luego,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{x^2+1} = +\infty.}$$

A veces, operando, podemos "forzar" una división en una indeterminación para poder usar la regla de L'Hôpital:

Ejemplo 5. Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x$.

Primero notemos que $\lim\limits_{x\to-\infty}\overbrace{x}^{\to-\infty}\overbrace{e^x}^{\to 0}$ es una indeterminación del tipo "$\infty . 0$". Veamos si reescribiendo la función como un cociente podemos usar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{x}^{\to-\infty}}{\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{1}^{\to 1}}{\underbrace{-e^{-x}}_{\to-\infty}} = 0.$$

Luego,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0.}$$

Observación 4: Como la regla de L'Hôpital nos permite calcular límites, puede ser aplicada para calcular asíntotas o decidir si una función es continua en un punto.

Ejemplo 6. Hallar todas las asíntotas verticales y horizontales de la función $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^2 + 2x}$.

Recordemos que, para calcular las asíntotas horizontales, hay que calcular los límites en $+\infty$ y en $-\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{e^x - 1}^{\to -1}}{\underbrace{x^2 + 2x}_{\to +\infty}} = 0$$

(notar que, como no hay indeterminación, el límite sale sin usar la regla de L'Hôpital).

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{e^x - 1}^{\to +\infty}}{\underbrace{x^2 + 2x}_{\to +\infty}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to +\infty}}{\underbrace{2x + 2}_{\to +\infty}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to +\infty}}{\underbrace{2}_{\to 2}} = +\infty.$$

Por lo anterior, tenemos que $y = 0$ es una asíntota horizontal por izquierda (o sea, en $-\infty$) y que no tiene asíntota horizontal por derecha (o sea, en $+\infty$).

Las asíntotas verticales pueden hallarse en los puntos donde la función no está definida o donde no es continua. En este caso, $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$, ya que en 0 y en -2 se anula el denominador, y en todos los valores del dominio f resulta continua. Para decidir si hay asíntotas verticales, hay que calcular los límites en estos puntos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{e^x - 1}^{\to 0}}{\underbrace{x^2 + 2x}_{\to 0}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{e^x}^{\to 1}}{\underbrace{2x + 2}_{\to 2}} = \frac{1}{2}$$

y por lo tanto, $x = 0$ **no** es asíntota vertical; por otro lado,

$$\lim_{x \to -2} \frac{\overbrace{e^x - 1}^{\to e^{-2} - 1 \simeq -0{,}86 \neq 0}}{\underbrace{x^2 + 2x}_{\to 0}} = \infty$$

y por lo tanto, $x = -2$ es asíntota vertical.

En resumen,

$$\boxed{f \text{ tiene asíntota horizontal } y = 0 \text{ por izquierda y asíntota vertical } x = -2.}$$

Ejemplo 7. Hallar a para que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(8x^2 + 1)}{x^4 + ax^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sea continua en $x = 0$.

Recordemos que para que f sea continua en 0 deben cumplirse tres condiciones:

- La función f debe estar definida en 0: en este caso esto sucede, ya que $f(0) = 4$.
- Debe existir $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{\ln(8x^2 + 1)}^{\to 0}}{\underbrace{x^4 + ax^2}_{\to 0}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{16x}{8x^2 + 1}}{4x^3 + 2ax} \overset{\text{operando}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{16\cancel{x}}{\underbrace{(8x^2 + 1)(4x^2 + 2a)\cancel{x}}_{\to 2a}} = \frac{8}{a}$$

- El límite y el valor de la función en 0 deben coincidir:

$$4 = \frac{8}{a} \Leftrightarrow a = 2.$$

Por lo tanto

$$\boxed{f \text{ es continua en } x = 0 \text{ si y sólo si } a = 2.}$$