Ejemplo 2: Calcular $C^0(f)$, $C^+(f)$ y $C^-(f)$ para $f(x) = (-2x^4 + 2x^3)(x^2 - 5x + 4)$.

Lo primero que vamos a calcular son **todos** los ceros de la función (para poder usar el Corolario del Teorema de Bolzano tenemos que saber que la función no vale 0 dentro de los intervalos a analizar, así que es fundamental hallar **todos** los ceros de antemano).

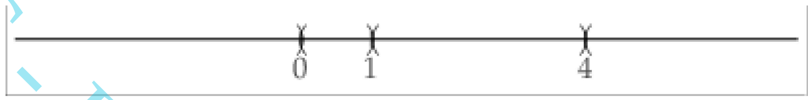
$$f(x) = (-2x^4 + 2x^3)(x^2 - 5x + 4) = 0 \text{ si y sólo si } -2x^4 + 2x^3 = 0 \text{ ó } x^2 - 5x + 4 = 0$$

(recordar que un producto es 0 si y sólo si alguno de los factores es 0).

a) $-2x^4 + 2x^3 = 0$: sacando factor común tenemos que $-2x^4 + 2x^3 = 2x^3(-x+1)$ y esto vale 0 si y sólo si $2x^3 = 0$ ó $-x + 1 = 0$; es decir, si y sólo si $x = 0$ ó $x = 1$.

b) $x^2 - 5x + 4 = 0$: usando la resolvente, tenemos que $x^2 - 5x + 4 = 0$ si y sólo si $x = 1$ ó $x = 4$.

Resumiendo, los únicos valores donde f vale 0 son $0, 1$ y 4. Es decir, tenemos que $C^0 = \{0, 1, 4\}$. Estos valores dividen a los números reales en cuatro intervalos, cada uno de los cuales no contiene ningún cero de la función f:



Entonces, tenemos una función continua en todo $\mathbb{R}$ (es polinómica) que en cada uno de los intervalos $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 4)$, $(4; +\infty)$ tiene signo constante. Por lo tanto, si elegimos un punto cualquiera en cada uno de estos intervalos, el signo de la función en dicho punto va a coincidir con el signo de la función en todo el intervalo.

Analicemos qué pasa en cada intervalo:

- En $(-\infty; 0)$: elegimos un punto en el intervalo, por ejemplo -2, y evaluamos

$$f(-2) = (-2(-2)^4 + 2(-2)^3)((-2)^2 - 5(-2) + 4) = (-48).(18) < 0.$$

Entonces en todo el intervalo $(-\infty; 0)$ la función es negativa.

- En $(0; 1)$: elegimos un punto en el intervalo, por ejemplo $0{,}5$, y evaluamos

$$f(0{,}5) = (-2(0{,}5)^4 + 2(0{,}5)^3)((0{,}5)^2 - 5(0{,}5) + 4) = (0{,}125).(1{,}75) > 0.$$

Entonces en todo el intervalo $(0; 1)$ la función es positiva.

- En $(1; 4)$: elegimos un punto en el intervalo, por ejemplo 2, y evaluamos

$$f(2) = (-2(2)^4 + 2(2)^3)((2)^2 - 5(2) + 4) = (-16).(-2) > 0.$$

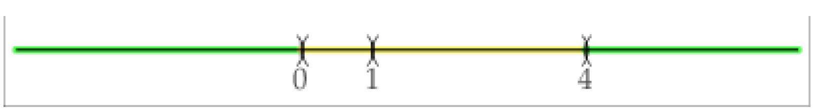
Entonces en todo el intervalo $(1; 4)$ la función es positiva. (Notar que, en este caso, en dos intervalos contiguos, el $(0; 1)$ y el $(1; 4)$, la función tiene el mismo signo: no es necesariamente cierto que de intervalo a intervalo los signos vayan cambiando.)

- En $(4; +\infty)$: elegimos un punto en el intervalo, por ejemplo 5, y evaluamos

$$f(5) = (-2(5)^4 + 2(5)^3)((5)^2 - 5(5) + 4) = (-1000).(4) < 0.$$

Entonces en todo el intervalo $(4; +\infty)$ la función es negativa.

Resumiendo lo obtenido en un gráfico con colores, tenemos que



Suele representarse lo obtenido en una tabla:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;4)$	4	$(4;+\infty)$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
pues	$f(-2)<0$		$f(0,5)>0$		$f(2)>0$		$f(5)<0$

Es decir, la respuesta del ejemplo es

$$\boxed{C^0(f)=\{0,1,4\},\ C^+(f)=(0;1)\bigcup(1;4) \text{ y } C^-(f)=(-\infty;0)\bigcup(4;+\infty).}$$