

Ejemplo. Decidir si la función $f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 15x + 14}{3x - 6} & \text{si } x \neq 2 \\ \frac{1}{3} & \text{si } x = 2 \end{cases}$ es continua en $x_0 = 2$.

Para poder decidir esto, hay que verificar si se cumplen o no las tres condiciones de la definición:

- $2 \in \text{Dom}(f)$ pues la función está definida en 2 (para calcular $f(2)$ hay que usar el segundo renglón de la definición de f).
- Calculemos $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Como nos interesan los x que se acercan a 2 y no lo que pasa en 2, usamos la fórmula de $f(x)$ para $x \neq 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overbrace{4x^2 - 15x + 14}^{-0}}{\underbrace{3x - 6}_{-0}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)(x-\frac{7}{4})}{3(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-\frac{7}{4})}{3} = \frac{1}{3}$$

- $f(2) = \frac{1}{3}$ y $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, los dos valores coinciden.

Como se cumplen las tres condiciones, podemos concluir que f es continua en $x_0 = 2$.

En cuanto a las funciones conocidas, podemos hacer las siguientes afirmaciones:

- Las funciones polinómicas son continuas en todo punto.
- Las funciones exponenciales y logarítmicas son continuas en todos los puntos de su dominio.
- Si dos funciones f y g son continuas en x_0 , entonces $f + g$, $f - g$ y $f \cdot g$ son continuas en x_0 .
- Si dos funciones f y g son continuas en x_0 y $g(x_0) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en x_0 .
- Si g es continua en x_0 , $g(x_0) = x_1$ y f es continua en x_1 , entonces $f \circ g$ es continua en x_0 .

Estas propiedades implican que, en las funciones con que trabajaremos, solo podrán aparecer discontinuidades (valores en los que no son continuas) cuando el valor no esté en el dominio de la función o bien, cuando trabajemos con funciones partidas en los puntos de cambio de definición.

Ejemplo. Hallar todos los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 3}{2x + 2} & \text{si } x > -1 \\ \frac{-3e^{x+1}}{x + 2} & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$

Debemos hallar los $x \in \mathbb{R}$ donde la función f no es continua.

Primero, calculamos el dominio de f , ya que los puntos donde no está definida son puntos de discontinuidad.

Si $x > -1$, la función se define como $f(x) = \frac{3x^2 - 3}{2x + 2}$. El único problema de definición de esta función es cuando

$2x + 2 = 0$, es decir, cuando $x = -1$, pero este punto no está en el conjunto que estamos considerando ($x > -1$). Luego, para todo $x > -1$ la función está definida.

Si $x \leq -1$, la función se define como $f(x) = \frac{-3e^{x+1}}{x + 2}$ y la única restricción para hacer esta cuenta es cuando $x + 2 = 0$,

es decir, cuando $x = -2$. Como $-2 \leq -1$, está en el conjunto que estamos considerando y resulta ser el único valor donde

no se puede calcular f . Luego, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$ con lo que ya podemos afirmar que $x_0 = -2$ es un punto de discontinuidad de f .

Para cualquier $x > -1$, las funciones $g_1(x) = 3x^2 - 3$ y $g_2(x) = 2x + 2$ son continuas por ser polinomiales, y como g_2 no se hace 0 en este conjunto, su cociente $f = \frac{g_1}{g_2}$ es continua en todo punto de este intervalo.

Para los $x < -1$ y $x \neq -2$, la función $h_1(x) = x + 1$ es continua por ser polinomial, y luego $h_2(x) = e^{x+1}$ es continua por ser composición de continuas. La función $h_3(x) = -3e^{x+1}$ resulta continua entonces por ser producto de continuas. La función $h_4(x) = x + 2$ es continua por ser polinomial y es no nula si $x \neq -2$, con lo que $f(x) = \frac{h_3(x)}{h_4(x)}$ es continua para $x < -1$ y $x \neq -2$.

Como la función f es partida, falta analizar qué pasa en el punto -1 , donde la función está definida de una forma a la derecha y de otra forma a la izquierda. Aquí tenemos que analizar si se cumplen las tres condiciones de la definición:

- Ya vimos que -1 pertenece al dominio de f .
- Para decidir si existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, analicemos la existencia de los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\overbrace{-3e^{x+1}}^{-3}}{\underbrace{x+2}_{\rightarrow 1}} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\overbrace{3x^2 - 3}^{-0}}{\underbrace{2x + 2}_{\rightarrow 0}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3(x+1)(x-1)}{2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3(x-1)}{2} = -3$$

Luego, como los dos límites laterales coinciden, resulta que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ existe y vale -3

- $f(-1) = \frac{-3e^{-1+1}}{-1+2} = -3$ y vale lo mismo que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Por las tres condiciones, podemos afirmar que la función f es continua en -1 , con lo que el único punto donde no es continua es $x_0 = -2$.

Se dice que una función es **continua en todo un intervalo** si la función es continua en todos los puntos del intervalo. Esto quiere decir, intuitivamente, que, en todo el intervalo en cuestión, la función no pega saltos y puede dibujarse sin levantar el lápiz. De igual forma, se dice que una función es continua en todo \mathbb{R} si es continua en todos los valores reales.