$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{4}\right\}.$$

El único candidato para asíntota vertical de f es, entonces, $x = -\frac{3}{4}$. Si calculamos el límite, por ejemplo cuando x tiende a $-\frac{3}{4}$ por derecha, nos da $\lim_{x\to-\frac{3}{4}^+} f(x) = -\infty$, por lo que podemos afirmar que $x = -\frac{3}{4}$ es asíntota vertical de f. Además, $\lim_{x\to-\frac{3}{4}^-} f(x) = +\infty$.

En este caso, el cálculo del límite cuando x tiende a infinito es más fácil que en el caso anterior:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-6}{4x+3} - 1 = \lim_{x\to\pm\infty} \overbrace{\frac{-6}{4x+3}}^{\to 0} - 1 = 0 - 1 = -1,$$

y por lo tanto f tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = -1$. Su imagen es, entonces, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Para hallar los ceros de f debemos resolver la ecuación $f(x) = 0$, es decir

$$\frac{-6}{4x+3} - 1 = 0.$$

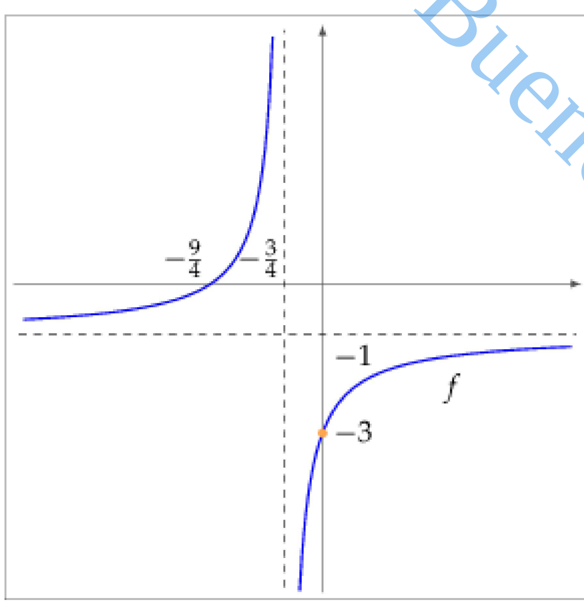
Despejemos x:

$$\frac{-6}{4x+3} = 1 \quad \underset{x\neq-\frac{3}{4}}{\Leftrightarrow} \quad -6 = 1.(4x+3) \quad \Leftrightarrow \quad -6 = 4x+3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -9 = 4x \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{9}{4} = x$$

Evaluando en un valor para ver cómo son las ramas del gráfico, obtenemos por ejemplo que $f(0) = -3$.

Un gráfico aproximado de f es



En general:

Si $f(x) = \frac{A}{Bx+C} + D$ es una función homográfica, su dominio se encuentra excluyendo aquellos valores de x que hacen cero el denominador:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{C}{B}\right\}.}$$

Como el límite $\lim_{x \to -\frac{C}{B}} f(x)$ da infinito, obtenemos que

$$\boxed{\text{la función homográfica } f \text{ tiene una asíntota vertical de ecuación } x = -\frac{C}{B}.}$$

Para hallar la ecuación de la asíntota horizontal, hay que calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{A}{Bx + C} + D = \lim_{x \to \pm\infty} \overbrace{\frac{A}{Bx + C}}^{\to 0} + D = 0 + D = D;$$

de la misma manera obtenemos $\lim_{x \to -\infty} f(x) = D$. Por lo tanto

$$\boxed{\text{la función homográfica } f \text{ tiene una asíntota horizontal de ecuación } y = D}$$

y su imagen es

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{D\}.}$$

Notemos que es sencillo pasar de la forma $f(x) = \frac{A}{Bx + C} + D$ a la forma $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, sacando denominador común. En el Ejemplo 2, sería:

$$f(x) = \frac{-6}{4x + 3} - 1 = \frac{-6 - 1.(4x + 3)}{4x + 3} = \frac{-6 - 4x - 3}{4x + 3} = \frac{-4x - 9}{4x + 3}.$$

(Notar que el dominio, las asíntotas y la imagen dan lo mismo porque es la misma función.)