$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{3\}}.$$

También se ve que $C^+(f) = (-\infty; \frac{5}{3}) \cup (2; +\infty)$ y $C^-(f) = (\frac{5}{3}; 2)$.

En general:

Si $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ es una función homográfica, su dominio se encuentra excluyendo aquellos valores de x que hacen cero el denominador:

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}}.$$

Como el límite $\lim\limits_{x \to -\frac{d}{c}} f(x)$ da infinito,

$$\boxed{\text{la función homográfica } f \text{ tiene una asíntota vertical de ecuación } x = -\frac{d}{c}.}$$

Para hallar la ecuación de la asíntota horizontal, hay que calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(a + \frac{b}{x}\right)}{x\left(c + \frac{d}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(a + \frac{b}{x}\right)}{\cancel{x}\left(c + \frac{d}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{\overbrace{\left(a + \overbrace{\frac{b}{x}}^{\to 0}\right)}^{\to a}}{\underbrace{\left(c + \underbrace{\frac{d}{x}}_{\to 0}\right)}_{\to c}} = \frac{a}{c};$$

de la misma manera obtenemos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{a}{c}$. Por lo tanto

$$\boxed{\text{la función homográfica } f \text{ tiene una asíntota horizontal de ecuación } y = \frac{a}{c}}$$

y su imagen es

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}.}$$

Otra forma de expresar una función homográfica

Así como las funciones cuadráticas se pueden expresar de tres maneras distintas (forma polinómica, forma canónica y forma factorizada), las funciones homográficas también se pueden expresar de la siguiente manera:

$$f(x) = \frac{A}{Bx + C} + D,$$

con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ y $B \neq 0$.

Ejemplo 2. Hallar dominio, ecuaciones de las asíntotas, ceros y hacer un gráfico aproximado de f, para $f(x) = \dfrac{-6}{4x+3} - 1.$

En este caso, tenemos que $A = -6$, $B = 4 \neq 0$, $C = 3$ y $D = -1$.

Para calcular el dominio de f, recordemos que no podemos dividir por cero, por lo que tenemos excluir del dominio los valores de x que hagan cero el denominador. En este caso, el denominador, $4x + 3$ es cero si y solo si $x = -\dfrac{3}{4}$, por lo que