$$\lim_{x\to 5^+} \frac{\overbrace{-3x^2+1}^{\to -74}}{\underbrace{x-5}_{\to 0^+}} = -\infty$$

Resumiendo nuestros resultados:

$$\boxed{\lim_{x\to 5^-} \frac{-3x^2+1}{x-5} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 5^+} \frac{-3x^2+1}{x-5} = -\infty}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x^2+2x}{x^2}$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x^2+2x}{x^2}$

Observamos que, tanto el numerador como el denominador de la función $f(x) = \dfrac{-x^2+2x}{x^2}$ se anulan en $x=0$ (donde queremos calcular el límite). Se dice entonces que hay una ***indeterminación del tipo*** $\dfrac{0}{0}$; esto significa que no podemos determinar el valor del límite solamente a partir de esta información (veremos que funciones que presentan este mismo comportamiento tienen distintos límites). Sin embargo, podemos *salvar la indeterminación* haciendo operaciones algebraicas (en este caso, factorizando el numerador de la fracción y simplificando), y así obtener el límite que queremos calcular:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2+2x}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}(-x+2)}{x^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{-x+2}^{\to 2}}{\underbrace{x}_{\to 0^-}} = -\infty$$

Al calcular el límite cuando x tiende a 0 (por la izquierda, en este caso), los valores de x que consideramos son cercanos a 0, pero *distintos de* 0; es por esto que en el segundo paso podemos simplificar un factor x en el numerador y en el denominador.

Como este límite da infinito, podemos afirmar que $x=0$ es asíntota vertical para $f(x) = \dfrac{-x^2+2x}{x^2}$.

Procedemos en forma análoga para calcular el segundo límite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2+2x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}(-x+2)}{x^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{-x+2}^{\to 2}}{\underbrace{x}_{\to 0^+}} = +\infty$$

Resumiendo, hemos obtenido que:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2+2x}{x^2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2+2x}{x^2} = +\infty}$$

4. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

En este caso también tenemos una indeterminación, ya que tanto el numerador como el denominador de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ se anulan en $x=1$. Para calcular el límite factorizamos el numerador y simplificamos la expresión:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to 0}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2$$

Cuando $x \to 1$, los valores que consideramos son cercanos a 1, pero $x \neq 1$; es por esto que en el segundo paso podemos simplificar el factor $x-1$.

De la misma manera se ve que $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ (queda como ejercicio para el lector). Resumiendo:

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = 2}$$

Así, cuando x se acerca a 1, sin importar si es por la derecha o por la izquierda, los valores de la función se acercan a un mismo número (en este caso, a 2). Decimos entonces que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 1 es 2 y escribimos

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

A partir de este límite, deducimos que $x = 1$ ***no*** es asíntota vertical para la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ porque ni el límite cuando x tiende a 1 por izquierda ni el límite por derecha dan infinito.

5. $\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+3x-6}{x^2-x}$

Nuevamente se trata de una indeterminación: el numerador y el denominador de la función se anulan en $x = 1$. Para calcular el límite, procedemos entonces de forma análoga a lo hecho en el ejemplo anterior: buscando las raíces de $3x^2+3x-6$ y x^2-x, podemos factorizar numerador y denominador y luego simplificar

$$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{3x^2+3x-6}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-x}_{\to 0}} = \lim_{x\to 1} \frac{3\cancel{(x-1)}(x+2)}{x\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} \frac{3\overbrace{(x+2)}^{\to 3}}{\underbrace{x}_{\to 1}} = \frac{3.3}{1} = 9.$$

Concluimos entonces que:

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+3x-6}{x^2-x} = 9}$$

En este ejemplo, ni el límite de $f(x) = \frac{3x^2+3x-6}{x^2-x}$ cuando x tiende a 1 por izquierda ni el límite por derecha dan infinito, por lo tanto podemos afirmar que $x = 1$ ***no*** es asíntota vertical para f.