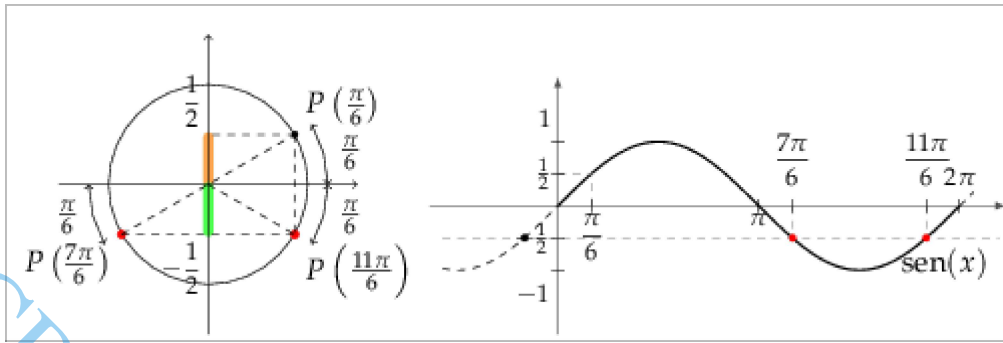


La tabla de valores nos muestra que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. A partir de este valor, y con ayuda de la circunferencia, podemos encontrar los valores de z en $[0; 2\pi]$ tales que $\text{sen}(z) = -\frac{1}{2}$:



Podemos ver tanto en el gráfico de la función seno como en la circunferencia que los únicos dos valores de z en $[0; 2\pi]$ que satisfacen la ecuación son $z = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ y $z = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$. Y como la función seno es periódica, **todo** valor de z que satisface la ecuación es de la forma

$$z = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad z = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

(Al dar vueltas enteras en la circunferencia, caemos en los mismos puntos.)

Pero recordemos que, en realidad buscamos $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right]$ que verifique

$$\text{sen}(3x + \pi) = -\frac{1}{2}.$$

Luego,

$$3x + \pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad 3x + \pi = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,$$

con $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right]$.

Despejando:

$$3x = -\pi + \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad 3x = -\pi + \frac{11\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{o} \quad 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{o} \quad x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},$$

con $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right]$.

Veamos entonces para qué valores de $k \in \mathbb{Z}$ estas últimas expresiones de x están en el intervalo $\left[-\pi; \frac{\pi}{6}\right]$.

k	$\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$	
-2	$\frac{\pi}{18} + \frac{2(-2)\pi}{3} = -\frac{23\pi}{18} < -\pi$	×
-1	$\frac{\pi}{18} + \frac{2(-1)\pi}{3} = -\frac{11\pi}{18}$	✓
0	$\frac{\pi}{18} + \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} = \frac{\pi}{18}$	✓
1	$\frac{\pi}{18} + \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} = \frac{13\pi}{18} > \frac{\pi}{6}$	×

k	$\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$	
-2	$\frac{5\pi}{18} + \frac{2(-2)\pi}{3} = -\frac{19\pi}{18} < -\pi$	×
-1	$\frac{5\pi}{18} + \frac{2(-1)\pi}{3} = -\frac{7\pi}{18}$	✓
0	$\frac{5\pi}{18} + \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} = \frac{5\pi}{18} > \frac{\pi}{6}$	×

De aquí deducimos:

$$C^0 = \left\{ -\frac{11\pi}{18}, -\frac{7\pi}{18}, \frac{\pi}{18} \right\}.$$

Resolvamos ahora un ejercicio en el que hallamos la imagen de una función trigonométrica.

Ejemplo. Sea $f(x) = -4 \cos(3x) - 2$. Determinar la imagen de f .

Para determinar la imagen de f , primero notemos que $-1 \leq \cos(z) \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{R}$. Así, tenemos que

$$-1 \leq \cos(3x) \leq 1.$$

Multipiquemos los tres miembros por -4 . Como -4 es un número negativo, al multiplicar por él, cambia el sentido de la desigualdad:

$$\begin{aligned} (-4) \cdot (-1) &\geq -4 \cos(3x) \geq (-4) \cdot 1. \\ 4 &\geq -4 \cos(3x) \geq -4. \end{aligned}$$

Y ahora restemos 2 en todos los miembros:

$$4 - 2 \geq -4 \cos(3x) - 2 \geq -4 - 2.$$

Tenemos entonces

$$2 \geq f(x) \geq -6,$$

y esto vale para todo x .

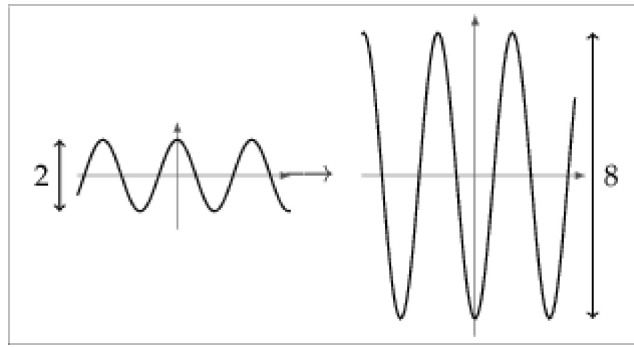
Observemos que $f(0) = -4 \cos(3 \cdot 0) - 2 = -4 \cos(0) - 2 = -4 \cdot 1 - 2 = -6$ y

$f(\pi) = -4 \cos(3 \cdot \pi) - 2 = -4 \cdot (-1) - 2 = 2$. Es decir, existen valores de x en donde f alcanza sus valores mínimo y máximo, respectivamente. Podemos deducir que

$$\text{Im } f = [-6; 2]$$

Veámoslo ahora gráficamente.

El factor -4 que multiplica a $\cos(3x)$ en $f(x) = -4 \cos(3x) - 2$, implica que el gráfico se "estira" verticalmente 4 veces y, debido al signo negativo se refleja respecto del eje x .



Al restar 2, la imagen se desplaza dos unidades hacia abajo. Esto nos lleva, como vimos analíticamente, a que la imagen es $[-6; 2]$.

CBC - Universidad de Buenos Aires