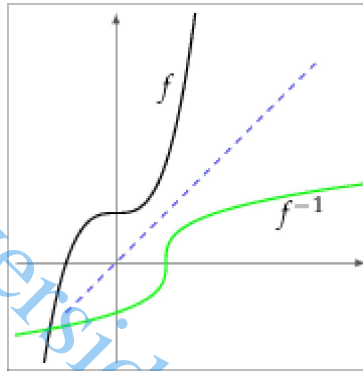


Ahora, dada una función  $f$  que tiene inversa  $f^{-1}$  sabemos que

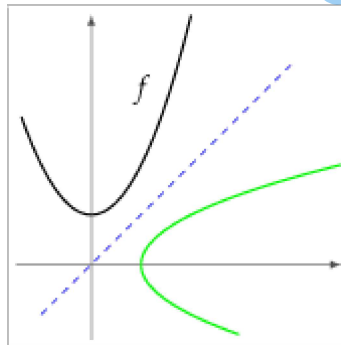
$$(a, b) \text{ está en el gráfico de } f \iff b = f(a) \iff f^{-1}(b) = a \iff (b, a) \text{ está en el gráfico de } f^{-1}.$$

Es decir, el gráfico de  $f^{-1}$  está formado por todos los puntos simétricos a los del gráfico de  $f$  respecto de la recta  $y = x$ .



Se puede ver que las funciones lineales no constantes tienen inversa. Sin embargo, hay otras funciones para las cuales esto no ocurre.

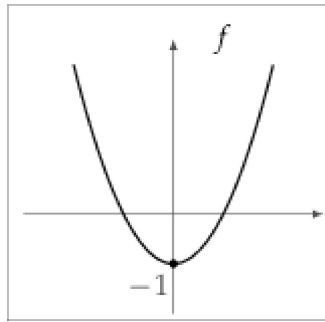
Un ejemplo de esto se ve en el siguiente gráfico, donde el gráfico simétrico al de  $f$  no corresponde a una función.



**Ejemplo.** Sea  $f(x) = x^2 - 1$ . Se trata de una función cuadrática cuyo gráfico es una parábola que tiene vértice de coordenadas

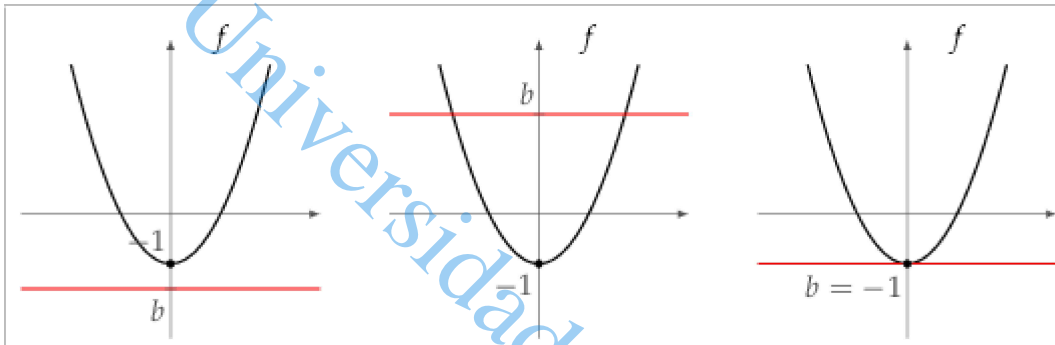
$$x_v = 0, \quad y_v = f(x_v) = f(0) = -1$$

y tal que el coeficiente de  $x^2$  es positivo. Un gráfico aproximado de  $f$  es



y, en particular,  $\text{Im}(f) = [-1, +\infty)$ . Observando el gráfico, podemos analizar cómo son las soluciones de la ecuación  $f(x) = b$  para los distintos valores de  $b \in \mathbb{R}$ :

- Si  $b < -1$ , la ecuación no tiene solución (pues  $b \notin \text{Im}(f)$ ).
- Si  $b > -1$ , la ecuación tiene dos soluciones, pues la recta  $y = b$  interseca al gráfico de  $f$  en dos puntos (uno de cada lado del eje de simetría de la parábola).
- Si  $b = -1$ , la ecuación tiene una única solución,  $x = 0$ , pues la recta  $y = -1$  interseca al gráfico de  $f$  solamente en el vértice.

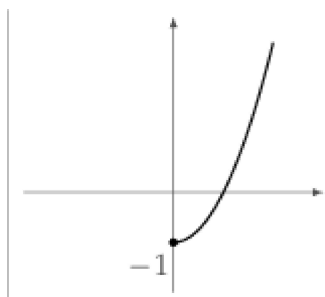


Dado que hay valores de  $b$  para los cuales la ecuación  $f(x) = b$  tiene más de una solución, *no es posible definir  $f^{-1}$ .*

Ahora bien, si *restringimos el dominio de  $f$*  al intervalo  $[0; +\infty)$ , es decir, si en lugar de considerar a  $f$  como una función definida en todo  $\mathbb{R}$ , la consideramos como función

$$f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 1,$$

su gráfico será:



Es decir, nos quedamos solamente con una mitad de la parábola. Ahora sí, para cada  $b \in \text{Im}(f) = [-1, +\infty)$ , hay un único  $a \in [0, +\infty)$  tal que  $f(a) = b$  (el que se obtiene como la primera coordenada del punto de intersección del gráfico con la recta  $y = b$ ). Entonces, podemos definir  $f^{-1} : [-1; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ .

Para encontrar la fórmula de  $f^{-1}$ , procedemos como en los ejemplos anteriores:

$$f(x) = y \iff x^2 - 1 = y \iff x^2 = y + 1$$

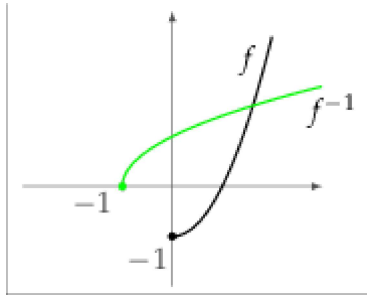
Como sabemos, si  $y > -1$ , esta ecuación tiene dos soluciones,  $x = \sqrt{y + 1}$  y  $x = -\sqrt{y + 1}$ , pero como buscamos  $x \in [0; +\infty)$  nos quedamos con

$$x = \sqrt{y+1}.$$

En consecuencia, llamando  $x$  a la variable,

$$\boxed{f^{-1} : [-1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}}$$

Si graficamos las dos funciones  $f$  y  $f^{-1}$  obtenemos:



**Otro ejemplo:**

2) Sea  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ . Calcular  $f^{-1}$ , su dominio y su imagen.

Buscamos para cada  $y$ , el valor de  $x$  tal que  $f(x) = y$ :

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{2x-1}{x+1} = y \iff 2x-1 = y(x+1) \iff 2x-1 = yx+y \iff 2x-yx = y+1 \\ &\iff (2-y)x = y+1 \iff x = \frac{y+1}{2-y} \end{aligned}$$

Entonces, la función inversa de  $f$  es la función  $f^{-1}$  que a cada  $y$  le asigna la solución  $\frac{y+1}{2-y}$  de la ecuación; llamando  $x$  a la variable,

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2-x}}$$

A partir de la fórmula vemos que  $\text{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{2\}$  (pues, como no se puede dividir por 0,  $2-x \neq 0$ , es decir  $x \neq 2$ ).

Además, como  $\text{Im}(f^{-1}) = \text{Dom}(f)$ , resulta que  $\text{Im}(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{-1\}$  (calculando el dominio de  $f$ ).