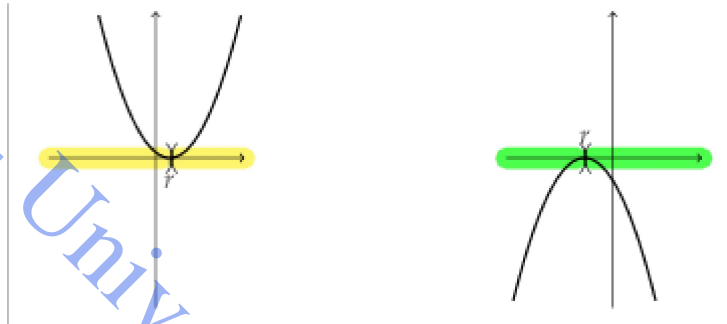


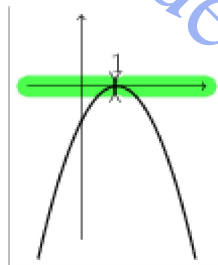
En este caso, tendremos como conjunto de positividad a $C^+ = (-\infty; r) \cup (r; +\infty)$ y como conjunto de negatividad al conjunto vacío ($C^- = \emptyset$), si $a > 0$. Y en el caso $a < 0$ es al revés: $C^+ = \emptyset$ y $C^- = (-\infty; r) \cup (r; +\infty)$.



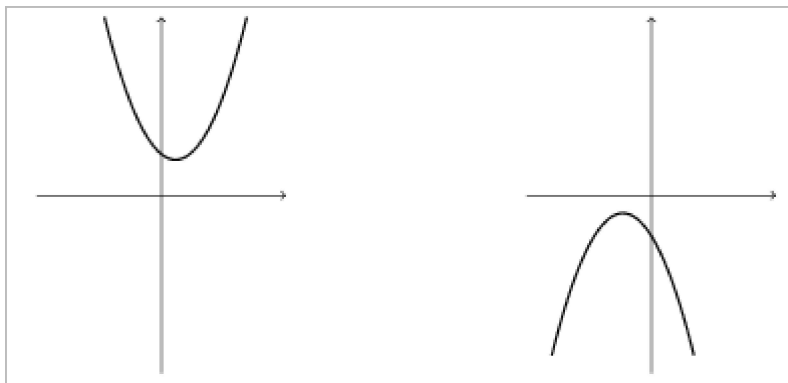
Por ejemplo, si tomamos $f(x) = -x^2 + 2x - 1$, al calcular sus raíces tenemos que

$$\frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 0}{-2} = 1.$$

Como la función tiene una única raíz y $a = -1 < 0$, resulta ser que $C^+ = \emptyset$ y $C^- = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.



- Si $b^2 - 4ac < 0$, la función no tendrá raíces (reales) porque no se puede calcular la raíz cuadrada de un número negativo. Su gráfico podría ser



En este caso, la función es siempre positiva (si $a > 0$) o siempre negativa (si $a < 0$).

Por ejemplo, si $f(x) = x^2 + x + 1$, $b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$. Entonces la función no tiene raíces reales y, como $a = 1 > 0$, siempre resulta positiva y, por lo tanto, $C^+ = \mathbb{R}$.

Notemos que si r_1 y r_2 son las raíces reales de la función cuadrática f , entonces la abscisa del vértice también se puede obtener como el promedio

$$x_v = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Cualquier función cuadrática se puede escribir de estas dos formas:

Forma polinómica: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Forma canónica: $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ y r_1 y r_2 son sus dos ceros reales, también se puede escribir a f como:

Forma factorizada: $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$

En el ejemplo $f(x) = 4x^2 - 8x + 5$ que estudiamos anteriormente, el vértice era $V = (1, -9)$ y las raíces $r_1 = -\frac{1}{2}$ y $r_2 = \frac{5}{2}$. Podemos entonces escribir a f en sus tres formas:

Forma polinómica: $f(x) = 4x^2 - 8x + 5$

Forma canónica: $f(x) = 4(x - 1)^2 - 9$

Forma factorizada: $f(x) = 4(x + \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2})$

Si r es el único cero real, entonces podemos escribir a f como $f(x) = a(x - r)^2$.

En el ejemplo anterior $f(x) = -x^2 + 2x - 1$, la única raíz es $r = 1$. Como $a = -1$, resulta que $f(x) = (-1)(x - 1)^2$.

Ejemplo

En este ejemplo estudiaremos todo lo visto anteriormente para una función en particular. No siempre necesitaremos hacer un estudio tan completo.

Consideremos la función

$$f(x) = -2x^2 - 4x + 6.$$

En este caso, $a = -2$, $b = -4$ y $c = 6$. Las coordenadas de su vértice se calculan

$$x_v = -\frac{-4}{2 \cdot (-2)} = -1$$

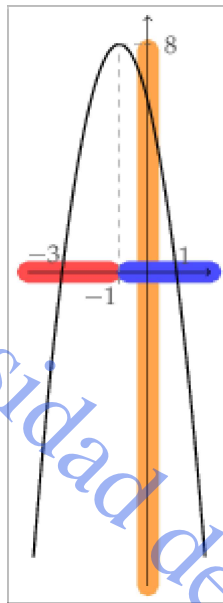
$$y_v = f(x_v) = f(-1) = -2(-1)^2 - 4(-1) + 6 = 8$$

Por lo tanto su vértice es $V = (-1, 8)$ y el eje de simetría de su gráfico es la recta vertical $x = -1$. Como $a = -2 < 0$, deducimos que la función es creciente en $(-\infty; -1)$, es decreciente en $(-1; +\infty)$, alcanza un máximo en $x = -1$ y su imagen es $\text{Im}f = (-\infty; 8]$.

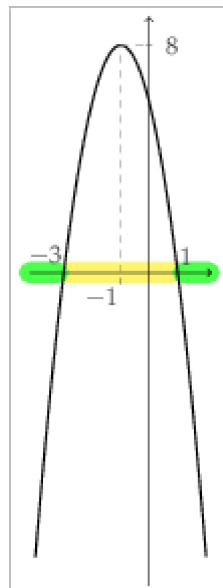
Las raíces de f se obtienen calculando

$$\frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(-2) \cdot 6}}{2(-2)} = \frac{4 \pm 8}{-4}.$$

Es decir, $r_1 = -3$ y $r_2 = 1$. Su gráfico resulta



Tenemos también que $C^+ = (-3; 1)$ y $C^- = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$



Notemos que haciendo el promedio entre las raíces obtenemos nuevamente la primera coordenada del vértice

$$x_v = \frac{(-3) + 1}{2} = -1.$$

Podemos escribir a f en sus tres formas:

Forma polinómica: $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$

Forma canónica: $f(x) = -2(x + 1)^2 + 8$

Forma factorizada: $f(x) = -2(x + 3)(x - 1)$

CBC - Universidad de Buenos Aires