

Método de integración por fracciones simples

Método de integración por fracciones simples

El método de integración por fracciones simples se utiliza para calcular primitivas de algunas funciones racionales, es decir, funciones del tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinomios.

Veremos cómo funciona este método para algunas funciones particulares. Recordemos que

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + K$$

y, más generalmente, para todo $a \in \mathbb{R}$, haciendo una sustitución sencilla, resulta que

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln(|x+a|) + K.$$

Usaremos estas integrales para calcular primitivas de funciones racionales "más complicadas".

Ejemplo 1. Calcular $\int \frac{1}{x(x+4)} dx$.

Para calcular la integral pedida, comenzamos escribiendo la función $\frac{1}{x(x+4)}$ como suma de funciones "más simples".

Como el denominador es el producto de x y $x+4$, podemos pensar que es el denominador común de dos fracciones, una con denominador x y otra con denominador $x+4$. Buscamos entonces valores a y b en $\mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{x(x+4)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+4}$$

Sumando las fracciones de la derecha, resulta que debe ser

$$\frac{1}{x(x+4)} = \frac{a(x+4) + bx}{x(x+4)}$$

y esto vale si y sólo si los numeradores coinciden, o sea,

$$a(x+4) + bx = 1$$

Como esta igualdad debe valer para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos despejar a y b evaluando x en distintos valores. Para simplificar las cuentas, elegimos los valores de x que hacen que se anulen los factores $x+4$ y x que multiplican a a y a b respectivamente, es decir, $x = -4$ y $x = 0$. Evaluando $x = -4$, nos queda

$$a(-4+4) + b(-4) = 1 \iff 0 \cdot a - 4b = 1 \iff -4b = 1 \iff b = -\frac{1}{4}$$

y para $x = 0$ resulta que

$$a(0+4) + b \cdot 0 = 1 \iff 4a = 1 \iff a = \frac{1}{4}.$$

(Observar que los valores hallados, $a = \frac{1}{4}$ y $b = -\frac{1}{4}$, verifican la igualdad $\frac{1}{4}(x+4) - \frac{1}{4}x = 1$.)

Concluimos entonces que

$$\frac{1}{x(x+4)} = \frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{-\frac{1}{4}}{x+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+4}$$

Ya podemos calcular la integral pedida:

$$\int \frac{1}{x(x+4)} dx = \int \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+4} \right) dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+4} dx = \frac{1}{4} \ln(|x|) - \frac{1}{4} \ln(|x+4|) + K$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x(x+4)} dx = \frac{1}{4} \ln(|x|) - \frac{1}{4} \ln(|x+4|) + K}$$

Ejemplo 2. Calcular $\int \frac{x+8}{x^2+x-6} dx$.

De manera similar a lo hecho en el ejemplo anterior, intentaremos escribir la función racional a integrar como suma de fracciones "simples". Para esto, comenzamos buscando los ceros del denominador, para escribirlo como producto de dos factores:

$$x^2 + x - 6 = 0 \iff x = 2 \text{ o } x = -3$$

Así, el denominador de la función a integrar se factoriza como

$$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$$

Buscamos entonces escribir la función $\frac{x+8}{x^2+x-6} = \frac{x+8}{(x-2)(x+3)}$ como una suma de dos fracciones, una con denominador $x-2$ y otra con denominador $x+3$, es decir, buscamos a y $b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{x+8}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3} = \frac{a(x+3) + b(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

o, equivalentemente, que los numeradores de las fracciones de la izquierda y la derecha de esta igualdad sean iguales, es decir,

$$a(x+3) + b(x-2) = x+8$$

Hallamos los valores de a y b evaluando esta igualdad en $x = 2$ y $x = -3$ y despejando:

- Para $x = 2$, queda $5a = 10$, es decir, $a = 2$.

- Para $x = -3$, se obtiene $-5b = 5$, es decir, $b = -1$.

Y los valores hallados cumplen la igualdad: $2(x+3) + (-1)(x-2) = x+8$. Tenemos entonces que

$$\frac{x+8}{(x-2)(x+3)} = \frac{2}{x-2} + \frac{(-1)}{x+3}$$

y podemos calcular la integral buscada:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+8}{(x-2)(x+3)} dx &= \int \left(\frac{2}{x-2} + \frac{(-1)}{x+3} \right) dx = 2 \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x+3} dx = \\ &= 2 \ln(|x-2|) - \ln(|x+3|) + K \end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{x+8}{(x-2)(x+3)} dx = 2 \ln(|x-2|) - \ln(|x+3|) + K}$$

Lo que hicimos en los ejemplos anteriores es la base del **método de integración por fracciones simples**. El procedimiento visto puede aplicarse de la misma manera para calcular la primitiva de una función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ siempre que el denominador Q tenga todas sus raíces en $\mathbb{R}$ y distintas, y que el grado del polinomio P del numerador sea **menor** que el grado de Q .

Observación. En ciertos casos, para calcular una primitiva de una función racional, no es necesario aplicar el método de

fracciones simples.

Por ejemplo, para calcular $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2} dx$, como $(x^2+3x+2)' = 2x+3$, podemos hacer la sustitución

$$u = x^2 + 3x + 2, du = (2x+3)dx$$

y nos queda

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln(|u|) + K = \ln(|x^2+3x+2|) + K$$

Calculemos esta misma integral por el método de fracciones simples.

Resolviendo la ecuación $x^2+3x+2=0$, obtenemos que los ceros del denominador de la función a integrar son $x=-1$ y $x=-2$, con lo cual $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$. Ahora buscamos a y b en $\mathbb{R}$ tales que

$$\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

o sea, tales que $2x+3=a(x+2)+b(x+1)$. Evaluando esta última igualdad en $x=-1$ y $x=-2$, deducimos que $a=1$ y $b=1$, es decir, que $\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$. Entonces:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \right) dx = \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x+2} dx = \ln(|x+1|) + \ln(|x+2|) + K$$

Observamos que las primitivas obtenidas por ambos métodos, si bien en apariencia son distintas, en realidad son la misma función: aplicando propiedades de las funciones logaritmo y módulo y operando, resulta que $\ln(|x+1|) + \ln(|x+2|) = \ln(|x^2+3x+2|)$.