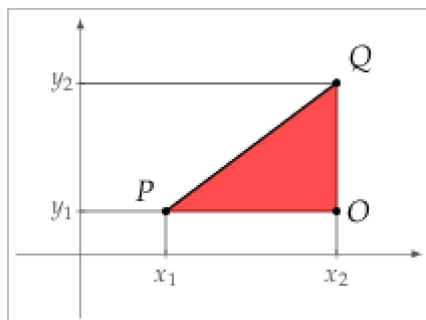


Distancia en el plano

Distancia entre puntos del plano

Dados dos puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ en el plano, nos interesa calcular la distancia entre P y Q , es decir, la longitud del segmento con extremos P y Q .



Esta distancia puede calcularse aplicando el Teorema de Pitágoras: considerando el punto O señalado en la figura, se forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento \overline{PQ} y cuyos catetos son los segmentos \overline{PO} y \overline{OQ} . El teorema de Pitágoras nos dice entonces que

$$d(P, Q)^2 = d(P, O)^2 + d(O, Q)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

En consecuencia, y teniendo en cuenta que una distancia siempre es mayor o igual que cero, obtenemos la siguiente fórmula para la distancia entre $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo 1. Calcular la distancia entre los puntos $P = (1, -7)$ y $Q = (-4, 5)$.

Aplicando la fórmula para la distancia obtenemos:

$$d(P, Q) = \sqrt{(-4 - 1)^2 + (5 - (-7))^2} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

Ejemplo 2. Sean $P = (-2, 1)$ y $Q = (a, 4)$. Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que la distancia entre P y Q es 5.

Aplicando la fórmula para calcular la distancia entre P y Q obtenemos:

$$d(P, Q) = \sqrt{(a - (-2))^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{(a + 2)^2 + 3^2} = \sqrt{(a + 2)^2 + 9}$$

Entonces, para que $d(P, Q) = 5$, debe ser

$$\sqrt{(a + 2)^2 + 9} = 5$$

Para resolver esta ecuación, elevamos al cuadrado ambos miembros (en este caso, elevar al cuadrado ambos miembros de la igualdad no modifica el conjunto de soluciones, ya que $\sqrt{(a + 2)^2 + 9}$ y 5 son números mayores o iguales que 0):

$$(a + 2)^2 + 9 = 25$$

y despejamos

$$(a + 2)^2 = 25 - 9 \iff (a + 2)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a+2)^2} = \sqrt{16} \Leftrightarrow |a+2| = 4$$

$$\Leftrightarrow a+2 = 4 \text{ o } a+2 = -4$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a = 2 \text{ o } a = -6}$$

Verifiquemos que para estos dos valores de a se cumple lo pedido. Para $a = 2$, se obtiene $Q = (2, 4)$ y vale

$$d(P, Q) = \sqrt{(2+2)^2 + 9} = \sqrt{4^2 + 9} = \sqrt{25} = 5,$$

y, para $a = -6$, se obtiene $Q = (-6, 4)$, que cumple

$$d(P, Q) = \sqrt{(-6+2)^2 + 9} = \sqrt{(-4)^2 + 9} = \sqrt{25} = 5.$$

CBC - Universidad de Buenos Aires