Conjuntos y recta real

Conjuntos, pertenencia e inclusión

Un *conjunto* es una colección de objetos. A los objetos que forman un conjunto, se los llama *elementos* del conjunto.En un conjunto, no importa el orden de los elementos, ni se tienen en cuenta repeticiones de elementos.

Si el conjunto H es la colección de números formada por -3, 4 y $\sqrt{2}$, entonces H es un conjunto y se lo puede escribir así:

$$H = \{-3, 4, \sqrt{2}\}.$$

Si A es un conjunto y a es un elemento de A, se dice que a *pertenece* a A, y se escribe $a \in A$. Si un objeto b no pertenece a un conjunto A, escribimos $b \notin A$.

En nuestro ejemplo anterior $-3 \in H$ y $2,23 \notin H$.

Dos conjuntos que se utilizan frecuentemente en matemática son los siguientes:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, el conjunto de los números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, el conjunto de los números enteros.

Dos formas de describir un conjunto son por *extensión* y por *comprensión*. Por ejemplo, el conjunto C que contiene a todos los números naturales del 1 al 4 se puede definir como sigue:

- (por *extensión*) enumerando todos sus elementos, escritos entre llaves: $C = \{1, 2, 3, 4\}$ (notar que así fue como definimos al conjunto H de antes, elemento por elemento);

- (por *comprensión*) a través de una propiedad que verifican los elementos del conjunto y ningún otro: $C = \{n \in \mathbb{N} : \ n \leq 4\}$ (lo que se lee: el conjunto C es el de los n que pertenecen a $\mathbb{N}$ tales que n es menor o igual que 4). Los dos puntos o la barra / son símbolos indistintos que se leen "tal que" o "tales que".

Otros conjuntos que se utilizan frecuentemente en matemática son los siguientes:

- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}$, el conjunto de los números racionales (fracciones con numerador y denominador enteros);
- $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales, que corresponden a todos los desarrollos decimales posibles (finitos e infinitos) con signo positivo o negativo.

Se define el *conjunto vacío* como el conjunto que no tiene ningún elemento, y se lo representa con el símbolo $\emptyset$.

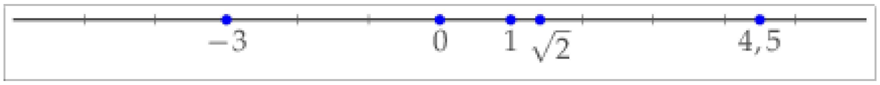
Dos conjuntos A y B son *iguales* si tienen exactamente los mismos elementos. En este caso, se escribe $A = B$.

Se dice que un conjunto B *está incluido* en un conjunto A, o que B es un *subconjunto* de A, si cada elemento de B es un elemento de A. En este caso, se nota $B \subset A$. Si B no es un subconjunto de A, escribimos $B \not\subset A$.

Con los ejemplos anteriores, $C \subset \mathbb{N}$ y $H \not\subset \mathbb{N}$ (porque $-3 \notin \mathbb{N}$ y $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$).

Recta real

Los números reales pueden representarse en una recta (en general, por convención, se dibuja una recta horizontal). Fijamos un punto como el 0 y otro punto a su derecha como el 1. Todos los puntos de la recta van a representar números y cada número real se puede representar con un punto. Los números a la derecha del 0 serán los positivos. Los números a la izquierda del 0 serán los negativos. La escala de su ubicación está definida por la distancia entre el 0 y el 1 (el 2 estará al doble de distancia, el -3 al triple, el $4,5$ a 4 unidades y media de distancia del 0, $\sqrt{2}$ a $1,41421356...$ unidades).



Se define el *módulo* o *valor absoluto* de un número real x (y se escribe $|x|$) a la distancia del número x al 0. Por lo tanto $|3| = 3$, $|-2| = 2$ y $|0| = 0$. Notar que como el módulo es una distancia, siempre será mayor o igual que 0.

Entonces, por ejemplo, se tiene la siguiente igualdad de conjuntos

$$\{x \in \mathbb{R} : |x| = 5\} = \{-5, 5\}$$

ya que esos son todos los números que distan 5 del 0.

Operaciones entre conjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

- La *unión* de A y B, que se nota $A \cup B$, es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto A o al conjunto B (o sea, los elementos que pertenecen a alguno de los dos conjuntos, incluyendo los que pertenecen a ambos); es decir,

$$A \cup B = \{x : \ x \in A \ \text{ o } \ x \in B\}.$$

Con los ejemplos anteriores, $C \cup H = \{-3, 1, 2, 3, 4, \sqrt{2}\}$.

- La *intersección* de A y B, que se nota $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B; es decir,

$$A \cap B = \{x : \ x \in A \ \text{ y } \ x \in B\}.$$

Con los ejemplos anteriores, $C \cap H = \{4\}$. Otro ejemplo: $\{1, 2, 3\} \cap \{5, 6\} = \emptyset$ pues los dos conjuntos en cuestión no tienen elementos en común.

Cuando dos conjuntos no tienen elementos en común (es decir, cuando su intersección es vacía) se dice que son *disjuntos*.

- La *diferencia* de conjuntos "A menos B", que se nota $A - B$, es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B; es decir,

$$A - B = \{x : \ x \in A \ \text{ y } \ x \notin B\}.$$

Con los ejemplos anteriores, $C - H = \{1, 2, 3\}$ y $H - C = \{-3, \sqrt{2}\}$.

Notar que, como sucede en el ejemplo que se mostró, en general, las diferencias $A - B$ y $B - A$ no son iguales.