PRÁCTICA 6

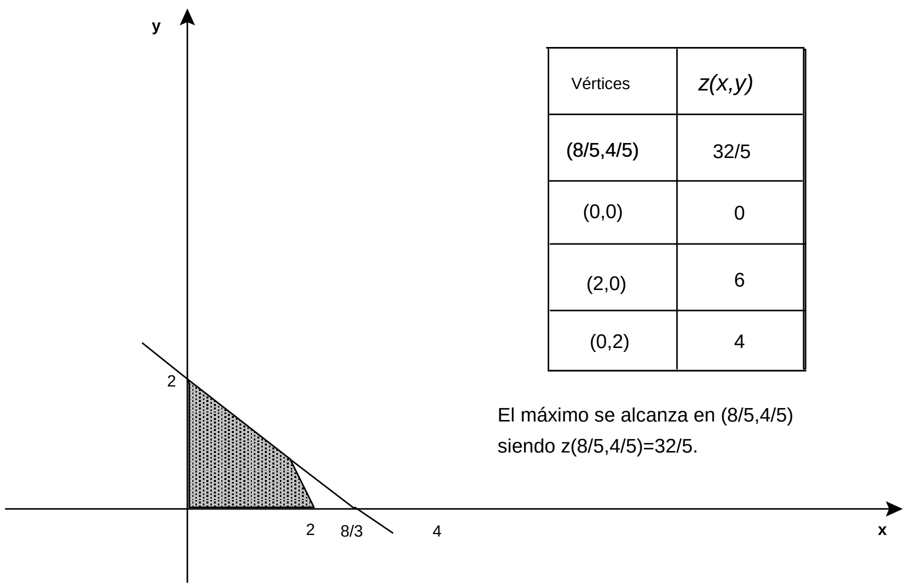
Problema standard de maximización. Método Simplex.

Ejemplo

En la práctica anterior hemos aprendido a resolver problemas del tipo:

¨Hallar el MÁXIMO de $z = 3x_1 + 2x_2$ sujeto a $R = \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 8 \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \end{cases}$ ¨

En este caso, la región R es un polígono, y sabemos que el máximo se alcanza en uno de sus vértices:



Vértices	*z(x,y)*
(8/5,4/5)	32/5
(0,0)	0
(2,0)	6
(0,2)	4

El máximo se alcanza en (8/5,4/5) siendo z(8/5,4/5)=32/5.

¿Qué pasaría si el problema, en lugar de tener 2 variables, tuviera más? No sólo no lo podríamos dibujar, sino que la cantidad de vértices puede ser un número muy grande, y evaluar en todos para ver en dónde se alcanzaría el máximo valor sería extremadamente costoso.

El método dado a continuación, conocido como MÉTODO SIMPLEX, desarrollado por Dantzig (1947), es sumamente ingenioso.
El mismo recorre los vértices de manera que la función objetivo vaya incrementándose hasta que, no pudiendo aumentar más, se detiene habiendo encontrado el máximo valor.
Para hacerlo, basta con triangular cierta matriz siguiendo unos pasos muy sencillos.
Se tardó aproximadamente 40 años en aceptar por qué el método funciona tan bien como lo hace. Recién en 1984 otro matemático propuso un método alternativo, pero el método de Dantzig sigue funcionanado mejor en casos que tengan hasta 20000 variables!

El desarrollo del tema se basa en el capítulo "Programación Lineal" del libro *Aplicaciones de Álgebra lineal*, de Grossman.

Método simplex

Problema del máximo

Definición El siguiente problema se llama *problema estándar de maximización*: "dada una función

$$z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

que llamaremos **función objetivo**,

$A \in R^{mxn}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in R^m$ tal que $b_i \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$, y un sistema de restricciones

$$R = \begin{cases} AX \leq B \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

se quiere hallar un vector $X \in R^n$ *que maximice* z *y satisfaga* R".

La desigualdad $AX \leq B$ se interpreta coeficiente a coeficiente . Observar que entonces podemos describir las restricciones como

$$R = \begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases} .$$

Usaremos indistintamente la notación matricial o de sistemas de ecuaciones.

Método

Primero transformaremos las desigualdades en igualdades, introduciendo nuevas variables "de holgura": las nuevas variables indican cuánto le falta a cada desigualdad para convertirse en igualdad. Se irán recorriendo los vértices de la región de factibilidad e incrementando el valor de la función en cada paso, hasta encontrar el máximo. El método permite realizar estos pasos de una manera sistemática y sencilla.

1. Se transforma el sistema con $\leq$ en uno con $=$, introduciendo una **variable de holgura** para cada ecuación. Considerando el ejemplo anterior, pongamos $s_1 = 8 - 3x_1 - 4x_2$, $s_2 = 4 - 2x_1 - x_2$ entonces $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$. Ahora reescribimos el sistema utilizando igualdades en lugar de desigualdades, obteniendo el sistema de 4 incógnitas $R' = \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + s_1 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 4 \\ x_i \geq 0 \ , \ s_j \geq 0 \end{cases}$.

Planteamos $z = 3x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2$ y observemos que una solución de R' es tomar $x_1 = x_2 = 0$, $s_1 = 8$, $s_2 = 4$, siendo $z(0,0,8,4) = 0$. Si no tomamos en cuenta las nuevas variables y consideramos sólo $x_1 = x_2 = 0$, obtenemos un vértice de R, y también es $z(0,0) = 0$.

Las s_i son inicialmente las **variables básicas** y las x_i son las **variables no**

básicas.

2. TABLA SIMPLEX INICIAL:
Ahora escribimos el sistema R' en forma de tabla, poniendo en la primera fila el nombre de las variables, en la última la nueva función z y en la última columna las variables básicas. La primera fila se puede no poner, ya que es siempre igual, y la última columna es optativa -pues se reconstruye fácilmente. En el caso de nuestro ejemplo obtenemos:

x_1	x_2	s_1	s_2		
3	4	1	0	8	s_1
2	1	0	1	4	s_2
3	2	0	0	z	

Los coeficientes de la última fila se llaman **indicadores**: $(c_1, \ldots, c_{n+m})$. Debemos interpretar que los valores de las variables básicas $s_1 = 8$, $s_2 = 4$, los de las no básicas $x_1 = x_2 = 0$ y que el valor de la función es 0: $z = 0$.

3. Nos fijamos si hay algún indicador positivo. En caso afirmativo, el valor de z se puede ir incrementando, pues como $z = 3x_1 + 2x_2$, si tomamos algún $x_i \geq 0$ obtenemos $z > 0$. Luego elegimos un indicador positivo, por ejemplo el mayor. En este caso, $c_1 = 3$. Llamamos j al índice del indicador elegido. En este caso $j = 1$.

4. En la columna j se consideran todos los coeficientes de la misma que son positivos -esto es, los $a_{ij} > 0$- y se calculan los cocientes $\frac{b_i}{a_{ij}}$, eligiendo el a_{ij} que lo minimiza. En nuestro ejemplo, comparamos $\frac{8}{3}$, $\frac{4}{2}$, y vemos que el menor se obtiene para $\frac{b_3}{a_{31}} = \frac{4}{2}$. Entonces, el pivote elegido es a_{21}.

5. Se triangula la matriz del simplex tomando como pivote el coeficiente elegido, en este caso a_{21}.

a. Se divide la fila i -en nuestro caso, la fila 3- por a_{21}:

x_1	x_2	s_1	s_2		
3	4	1	0	8	s_1
$\boxed{1}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	x_1
3	2	0	0	z	

.

b. Pivoteamos:

x_1	x_2	s_1	s_2		
0	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	2	s_1
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	x_1
0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$z-6$	

.

La variable básica s_2 se reemplaza por x_1, por lo cual ahora las variables básicas son $s_1 = 2$, $x_1 = 2$ y las no básicas $s_2 = x_2 = 0$. Claramente, estos valores verifican todas las ecuaciones de R' y además "hacen aumentar" a z, ya que $z(2,0,2,0) = 6$.

Si sólo consideramos z en las variables originales, también es $z(2,0) = 6$.

6. Nos fijamos si quedan indicadores positivos. Como $c_2 = \frac{1}{2} > 0$, la respuesta es sí. Entonces, *se debe repetir el procedimiento anterior*.

a. Comparamos $\frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$, $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$. Como $\frac{4}{5}$ es el menor, el pivote es $a_{12} = \frac{5}{2}$.

b. Dividimos la primera fila por a_{12} , obteniendo:

x_1	x_2	s_1	s_2		
0	$\boxed{1}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	x_2
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	x_1
0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$z-6$	

$\sim$

x_1	x_2	s_1	s_2		
0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	x_2
1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{5}$	x_1
0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$z-\frac{32}{5}$	

Las variables básicas son ahora $x_2 = \frac{4}{5}$, $x_1 = \frac{8}{5}$, y la solución factible asociada es

$$z(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}) = \frac{32}{5}$$

Observemos que el hecho de comparar los cocientes $\frac{b_i}{a_{ij}}$ garantiza que todos los b_i se mantengan positivos. En el caso de habernos equivocado en la elección, alguno de los términos independientes (los b_i) se hará negativo al triangular, con lo que nos damos cuenta del error y rehacemos.
Esta condición garantiza que el vector hallado pertenezca a la región R: la solución siempre tiene todas sus variables no básicas iguales a 0, y las básicas son iguales a los coeficientes independientes, que son *positivos.* (Observar que si se verifica el sistema R', como las variables de holgura son positivas, también se verifica R.)

7. Nos fijamos si queda algún indicador positivo. ¡No! Eso nos dice que el diagrama anterior es un **diagrama terminal**, y que *la solución asociada al mismo nos da la solución del problema del máximo.* El hecho de que no queden indicadores positivos significa que no se puede incrementar el valor de z. Veámoslo en este caso.
De la última fila de la tabla inferimos que:

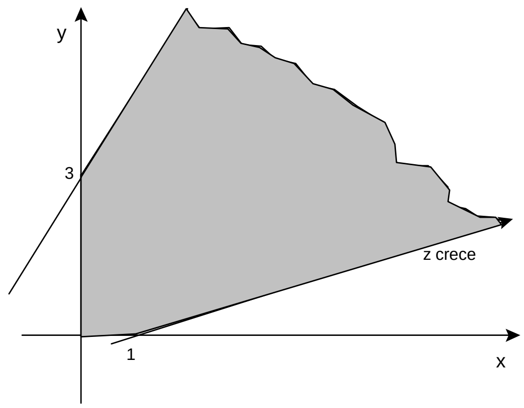
$$z - \frac{32}{5} = 0x_1 + 0x_2 - \frac{1}{5}s_1 - \frac{6}{5}s_2.$$

Para incrementar el valor de z, las variables que no están multiplicadas por 0 deberían ser negativas, lo que no puede suceder en nuestra región.
La solución asociada a la tabla final es $\boxed{x_2 = \frac{4}{5},\ x_1 = \frac{8}{5} \text{ y } s_1 = s_2 = 0}$, siendo $\boxed{z = \frac{32}{5}}$.
Observemos que alterar los valores de las variables básicas no cambiaría el valor de z, ya que sus coeficientes son 0, y cambiar el de las no básicas disminuiría el valor de la función (recordar que son mayores o iguales a cero). Por lo tanto, *se ha alcanzado el máximo*.

Ejemplos

1. MAXIMIZAR $z = x_1 + 2x_2$ sujeta a $R = \begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 1 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \end{cases}$.

Observemos que nuestra restricción es la región del plano:



Solución:
Construimos primero

$$R' = \begin{cases} x_1 - 4x_2 + s_1 = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 + s_2 = 6 \\ x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \\ s_1 \geq 0 \ , \ s_2 \geq 0 \end{cases} .$$

(Este paso se puede saltear si no nos equivocamos al construir la tabla inicial.)
La tabla inicial es

x_1	x_2	s_1	s_2		
1	-4	1	0	1	s_1
-3	2	0	1	6	s_2
1	2	0	0	z	

.

Aplicando el método -elegiendo como indicador a c_1- llegamos a la siguiente tabla

x_1	x_2	s_1	s_2		
1	-4	1	0	1	x_1
0	-10	3	1	9	s_2
0	6	-1	0	$z-1$	

.

No es tabla final dado que queda un indicador positivo: $c_2 = 6 > 0$. *Pero no se puede seguir aplicando el método pues no hay coeficientes positivos en la columna de este pivote*. La solución factible asociada a esta tabla es $z(1,0) = 1$. Observemos que $z - 1 = 6x_2 - s_1$, luego, si hacemos $s_1 = 0$ entonces $z = 1 + 6x_2$,

y *crece indefinidamente* pues x_2 no está acotada en la región.
(Ver en el gráfico que si nos movemos por la arista correspondiente al punto esquina $(1, 0)$, aumentamos el valor de z indefinidamente.)
La respuesta es, entonces, que

$\boxed{z \text{ no alcanza un máximo valor en la región indicada}}$.

2. MAXIMIZAR $z = 3x_1 - 2x_2 + 2x_3$ sujeto a $R = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 15 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 26 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 43 \\ x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\ ,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$.

Solución:
La tabla inicial es

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
1	1	1	1	0	0	15	s_1
2	1	2	0	1	0	26	s_2
5	2	3	0	0	1	43	s_3
3	–2	2	0	0	0	z	

.

Las variables básicas son s_1, s_2, s_3 y las variables no básicas x_1, x_2, x_3, y $z = 0$.
Elegimos el indicador $c_1 = 3$. Comparamos los cocientes: $\frac{15}{1}$, $\frac{26}{2}$, $\frac{43}{5}$, siendo el menor este último. Luego, elegimos como pivote $a_{31} = 5$. Dividimos por 5 la fila 3, obteniendo:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
1	1	1	1	0	0	15	s_1
2	1	2	0	1	0	26	s_2
$\boxed{1}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{43}{5}$	x_1
3	–2	2	0	0	0	z	

$\sim$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{32}{5}$	s_1
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{44}{5}$	s_2
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{43}{5}$	x_1
0	$-\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{3}{5}$	$z - \frac{129}{5}$	

.

Las variables básicas son $s_1 = \frac{32}{5}$, $s_2 = \frac{44}{5}$, $x_1 = \frac{43}{5}$, las no básicas $s_3 = x_2 = x_3 = 0$ y $z = \frac{129}{5}$.
(Para chequear que no nos equivocamos en las cuentas, podemos verificar estos valores en la expresión original del sistema, y en z: $z(\frac{43}{5}, 0, 0) = \frac{129}{5}$.)
No es tabla final pues queda un indicador positivo $c_3 = \frac{1}{5}$. Entonces, debemos seguir triangulando. Para elegir el pivote, comparamos los cocientes: $\frac{\frac{32}{5}}{\frac{2}{5}} = 16$, $\frac{\frac{44}{5}}{\frac{4}{5}} = 11$, $\frac{\frac{43}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{43}{3} = 14\frac{1}{3}$. Como el menor es 11, el elegido es $a_{23} = \frac{4}{5}$.
Seguimos triangulando:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{32}{5}$	s_1
0	$\frac{1}{4}$	$\boxed{1}$	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	11	x_3
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{43}{5}$	x_1
0	$-\frac{16}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{3}{5}$	$z-\frac{129}{5}$	

$\sim$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	2	s_1
0	$\frac{1}{4}$	$\boxed{1}$	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{2}$	11	x_3
1	$\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	x_1
0	$-\frac{13}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$z-28$	

.

Ahora, las variables básicas $s_1 = 2$, $x_3 = 11$, $x_1 = 2$, las no básicas $s_3 = s_2 = x_2 = 0$ y $z = 28$
Como no queda ningún indicador positivo, esta tabla es *final* y el valor obtenido de z es el máximo.

Luego, $\boxed{z \text{ alcanza su máximo valor en } (2,0,11)\text{, siendo } z\,(2,0,11) = 28}$.

3. Hallar el máximo de $f = -x + y + z$ sujeta a $\begin{cases} x + z \le 5 \\ x + y \le 12 \\ y + z \le 8 \\ x \ge 2, y \ge 3, z \ge 0 \end{cases}$.

Solución:
Este no es un problema estándar de máximización, ya que tenemos las condiciones $x \ge 2$ e $y \ge 3$ en lugar de $x \ge 0$, $y \ge 0$.
Como es frecuente al resolver problemas, tratamos de ¨llevar¨ un problema nuevo que no sabemos resolver, a otro que sí sabemos. Para esto, observamos que si $x \ge 2$, $y \ge 3$ entonces $x - 2 \ge 0$, $y - 3 \ge 0$.
Esto induce a hacer el cambio de variables $x_1 = x - 2$, $y_1 = y - 3$. Para unificar la notación, ponemos $z_1 = z$. Debemos reescribir el sistema en función de las nuevas variables. Despejamos entonces: $x_1 + 2 = x$, $y_1 + 3 = y$ y sustituimos en el sistema original, obteniendo:

$$\begin{cases} x_1 + 2 + z_1 \le 5 \\ x_1 + 2 + y_1 + 3 \le 12 \\ y_1 + 3 + z_1 \le 8 \\ x_1 \ge 0, y_1 \ge 3, z_1 \ge 0 \end{cases}$$

el cual reescribimos:

$$\begin{cases} x_1 + z_1 \le 3 \\ x_1 + y_1 \le 7 \\ y_1 + z_1 \le 5 \\ x_1 \ge 0, y_1 \ge 0, z_1 \ge 0 \end{cases}$$

La función a maximizar es $f = -x + y + z = -(x_1 + 2) + y_1 + 3 + z_1 = -x_1 + y_1 + z_1 + 1$. Entonces: $f - 1 = -x_1 + y_1 + z_1$. Armamos ahora la tabla inicial en función de las nuevas variables y pivoteamos:

x_1	y_1	z_1	s_1	s_2	s_3		
1	0	1	1	0	0	3	s_1
1	1	0	0	1	0	7	s_2
0	$\boxed{1}$	1	0	0	1	5	s_3
-1	1	1	0	0	0	$f-1$	

$\sim$

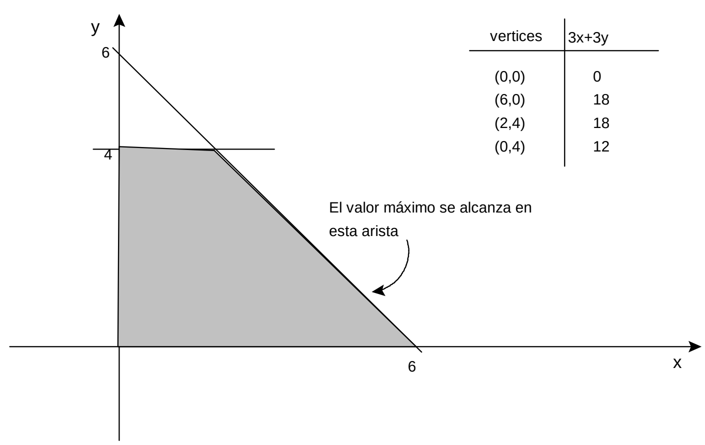
x_1	y_1	z_1	s_1	s_2	s_3		
1	0	1	1	0	0	3	s_1
1	0	-1	0	1	-1	2	s_2
0	1	1	0	0	1	5	y_1
-1	0	0	0	0	-1	$f-6$	

obteniendo ya la tabla final. El máximo se alcanza en $x_1 = 0$, $y_1 = 5$, $z_1 = 0$ siendo $f = 6$.
Volviendo a las variables originales, $x - 2 = 0$, $y - 3 = 5$, $z = 0$. Esto es, $x = 2$, $y = 8$, $z = 0$. Observemos que efectivamente, como $f = -x + y + z$, resulta que el máximo de f es $-2 + 8 + 0 = 6$. Entonces,

$\boxed{f \text{ alcanza su máximo valor para } x = 2,\ y = 8,\ z = 0, \text{ siendo } f = 6 \text{ el valor máximo}}$.

4. Hallar el máximo de $f = 3x + 3y$ en la región R : $\begin{cases} x + y \leq 6 \\ y \leq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

Solución:
Como éste es un problema de dos variables, podemos resolverlo por el método gráfico. La región es acotada:



Veamos ahora cómo nos damos cuenta, aplicando el método símplex, que la solución se alcanza en una arista. La tabla inicial y el pivoteo es muy sencillo:

x	y	s_1	s_2		
$\boxed{1}$	1	1	0	6	s_1
0	1	0	1	4	s_2
3	3	0	0	f	

$\sim$

x	y	s_1	s_2		
1	1	1	0	6	x
0	1	0	1	4	s_2
0	0	-3	0	$f-18$	

De acá obtenemos que

$\boxed{f \text{ alcanza su máximo valor para } x = 6 \text{ e } y = 0, \text{ siendo } f = 18 \text{ el valor máximo}}$.

Las variables básicas son x y s_2. Observemos que, a pesar de que la tabla es final y ya hallamos el máximo, *podríamos seguir pivotenando*, y convertir la

variable y en básica; esto será posible ya que hay un 0 como indicador de la variable y.
Más fácil que decirlo es hacerlo:

x	y	s_1	s_2		
1	1	1	0	6	x
0	$\boxed{1}$	0	1	4	s_2
0	0	-3	0	f-18	

$\approx$

x	y	s_1	s_2		
1	0	1	-1	2	x
0	1	0	1	4	y
0	0	-3	0	f-18	

Esto nos dice que
f también alcanza su máximo para $x = 2$ e $y = 4$
(Como ejercicio, repita este procedimiento pero eligiendo en la tabla inicial el pivote a_{22}).

5. Hallar el máximo de $z = x_1 + 2x_2$ en la región $R: \begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_3 \leq 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$

Solución:
Planteamos la tabla inicial y pivoteamos:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
-2	$\boxed{1}$	0	1	0	0	1	s_1
0	0	1	0	1	0	2	s_2
2	-1	1	0	0	1	3	s_3
1	2	0	0	0	0	z	

$\approx$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		
-2	1	0	1	0	0	1	x_2
0	0	1	0	1	0	2	s_2
0	0	1	1	0	1	4	s_3
5	0	0	-2	0	0	z - 2	

Observemos que, a pesar de no ser tabla final, no podemos elegir pivote en la columna donde hay un indicador positivo, ya que en esa columna no hay coeficientes positivos. Esto nos dice que
la región no es acotada y z no alcanza máximo en la misma.

6. Un taller hace remeras de tres tamaños: P, M y G.
La cantidad de remeras P debe ser por lo menos el triple de la cantidad de remeras G. Además la cantidad de remeras P debe ser al menos la cantidad de M y G juntas. Si el taller puede fabricar a lo sumo 600 remeras y la ganancia es \$2 por cada P, \$3 por cada M y \$4 por cada G, hallar cuántas remeras de cada tamaño debe fabricar para maximizar la ganancia.

Solución:
Llamamos x a la cantidad de remeras de tamaño P, y a las de tamaño M y z a las de tamaño G.
Claramente deben ser $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ -además de ser números naturales.
También se debe verificar: $x \geq 3z$, $x \geq y + z$, y $x + y + z \leq 600$ -entre todas son a lo sumo 600.
La función ganancia es $G = 2x + 3y + 4z$. Luego, el problema es:

MAXIMIZAR

$$G = 2x + 3y + 4z$$

sujeta a

$$R = \begin{cases} -x + 3z \leq 0 \\ -x + y + z \leq 0 \\ x + y + z \leq 600 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$$

.
La tabla inicial es:

x	y	z	s_1	s_2	s_3		
-1	0	3	1	0	0	0	s_1
-1	1	$\boxed{1}$	0	1	0	0	s_2
1	1	1	0	0	1	600	s_3
2	3	4	0	0	0	G	

.

Pivoteamos:

x	y	z	s_1	s_2	s_3		
2	-3	0	1	-3	0	0	s_1
-1	1	1	0	1	0	0	z
2	0	0	0	-1	1	600	s_3
6	-1	0	0	-4	0	f	

$\sim$

x	y	z	s_1	s_2	s_3		
$\boxed{1}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	s_1
-1	1	1	0	1	0	0	z
2	0	0	0	-1	1	600	s_3
6	-1	0	0	-4	0	f	

x	y	z	s_1	s_2	s_3		
$\boxed{1}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	x
0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	z
0	3	0	-1	2	1	600	s_3
0	8	0	-3	5	0	G	

$\sim$

x	y	z	s_1	s_2	s_3		
1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	x
0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	z
0	$\boxed{1}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	200	s_3
0	8	0	-3	5	0	G	

$\sim$

x	y	z	s_1	s_2	s_3		
1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	x
0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	z
0	$\boxed{1}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	200	s_3
0	8	0	-3	5	0	G	

$\sim$

x	y	z	s_1	s_2	s_3		
1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	300	x
0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	100	z
0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	200	y
0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$G - 1600$	

,

donde obtenemos que la ganancia máxima posible es de $1600, y

se consigue fabricando 300 remeras de tamaño P, 200 de M y 100 de G.

Ejemplo de un problema de mínimo

Queremos ahora MINIMIZAR $z = -2x - 3y - 4z$ (observar que z=-G del ejemplo anterior) **sujeto a las mismas condiciones que el ejemplo anterior**:

$$R = \begin{cases} -x + 3z \leq 0 \\ -x + y + z \leq 0 \\ x + y + z \leq 600 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}.$$

Buscar el mínimo de z es buscar $(a,b,c) \in R$ tal que para todo $(x,y,z) \in R$ se verifique:

$$m = z(a,b,c) \leq z(x,y,z).$$

Pero esto equivale a buscar $(a,b,c) \in R$ tal que para todo $(x,y,z) \in R$ se verifique:

$$-m = -z(a,b,c) \geq -z(x,y,z).$$

Si consideramos la función $-z = -2x - 3y - 4z$, el problema de *hallar el mínimo de* z *en* R equivale a *hallar el máximo de* $(-z)$ *en* R, siendo

$$\max(-z) = -M = m = \min z.$$

Luego,

z alcanza su valor mínimo en $(300, 200, 100)$, siendo este valor: -1600.

Verificamos: $z(300, 200, 100) = -2 * 300 - 3 * 200 - 4 * 100 = -1600$.
Este procedimiento lo podemos aplicar en general:

MÉTODO:

El problema:

"calcular el MÍNIMO de una función z en una región R del tipo $\begin{cases} AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$ $(B \geq 0)$"

se puede resolver siguiendo los siguientes pasos:

1. Hallar el máximo M de $-z$, obteniendo $-z(a,b,c) = M$.

$$\begin{bmatrix} & & \\ & \boxed{-z} & \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} & & \\ & \boxed{-z - M} & \end{bmatrix}$$

De aquí,

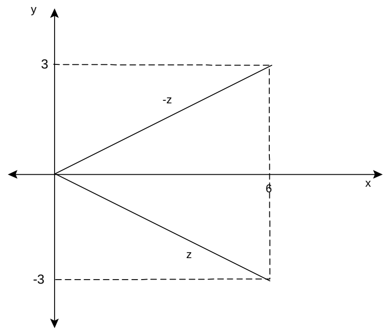
$$\max(-z) = M$$

2. Deducimos que el mínimo de z es $m = -M$, siendo $z(a,b,c) = -M = m$. Esto es,

$$\min z = -M.$$

Ejemplos

1. Si $\begin{cases} z : [0,6] \to \Re \\ -z : [0,6] \to \Re \end{cases}$ dadas por $\begin{cases} z = -\frac{1}{2}x \\ -z = \frac{1}{2}x \end{cases}$, entonces el mínimo de z es -3 y el máximo de $-z$ es 3.



2. MINIMIZAR $z = x_1 + x_2 - 2x_3$ sujeta a R : $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 10 \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 32 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$

Solución:
Para resolver, buscamos el máximo de $-z = -x_1 - x_2 + 2x_3$ sujeta a R.
La tabla inicial es

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
2	-3	1	1	0	10	s_1
5	5	4	0	1	32	s_2
-1	-1	2	0	0	$-z$	

.

El único pivote posible es $a_{23} = 4$. Pivoteamos:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
2	-3	1	1	0	10	s_1
$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\boxed{1}$	0	$\frac{1}{4}$	8	s_2
-1	-1	2	0	0	$-z$	

. $\sim$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
$\frac{3}{4}$	$\frac{-17}{4}$	0	1	$\frac{-1}{4}$	2	s_1
$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	8	x_3
$\frac{-7}{2}$	$\frac{-7}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	$-z-16$	

Tenemos suerte, la tabla es final pues no quedan indicadores positivos. La solución asociada al problema del máximo es: $\boxed{-z(0,0,8) = 16}$.

Entonces, $\boxed{\text{la solución del problema original de mínimo es: } z(0,0,8) = -16}$.

3. Convertir el siguiente programa en un programa de maximización y resolver:

MINIMIZAR $z = -2x + y$ sujeta a $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ x - y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$.

Solución

Planteamos el problema de MAXIMIZAR $-z = 2x - y$ sujeta a $\begin{cases} x + y \leq 4 \\ x - y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

*y lo resolvemos, .(*no debemos olvidar que, aunque el problema planteado sea de minimizar, para aplicar el método simplex primero debemos convertirlo en un problema apropidado de maximización, y por último, debemos buscar la respuesta del problema original).
Como es de dos variables, podemos elegir hacerlo gráficamente o por método simplex. Eligimos la segunda opción, planteamos la tabla inicial y pivoteamos.

x_1	x_2	s_1	s_2		
1	1	1	0	4	s_1
$\boxed{1}$	-1	0	1	1	s_2
2	-1	0	0	$-z$	

$\sim$

x_1	x_2	s_1	s_2		
0	2	1	0	3	s_1
1	-1	0	1	1	x_1
0	1	0	-2	$-z-2$	

$\sim$

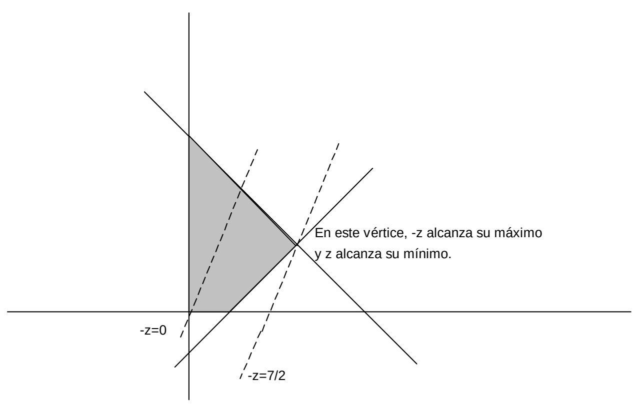
x_1	x_2	s_1	s_2		
0	$\boxed{1}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	s_1
1	-1	0	1	1	x_1
0	1	0	-2	$-z-2$	

$\sim$

x_1	x_2	s_1	s_2		
0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	x_2
1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	x_1
0	0	$-\frac{1}{2}$	-2	$-z-\frac{7}{2}$	

Entonces: $-z$ alcanza su máximo en $x_1 = \frac{5}{2}$ y $x_2 = \frac{3}{2}$, siendo $-z = \frac{5}{2}$.
La respuesta a nuestro problema es:

$\boxed{z \text{ alcanza su mínimo en } x_1 = \frac{5}{2} \text{ y } x_2 = \frac{3}{2}\text{, siendo } z = -\frac{5}{2}}$.



Problema dual.

Ejercicio

1. Un comerciante fabrica colchas Súper y Estándar, con cuero y gamuza. Cada colcha Súper lleva 4 rollos de cuero y 3 de gamuza, y cada colcha Estándar lleva 2 rollos de cuero y 1 de gamuza.
El comerciante tiene un stock de 16 rollos de cuero y 9 de gamuza, y piensa vender cada colcha Súper a \$42 y cada colcha Estándar a \$18.
¿Cuántas colchas de cada tipo debe fabricar para maximizar los ingresos?

2. El mismo comerciante se cansó de fabricar colchas y le quiere vender todos los rollos de cuero y gamuza a un comprador. Pretende hacer su venta de manera que con el material que hubiera usado en cada colcha obtenga al menos lo mismo que si las hubiera fabricado.
Se quiere saber cuál es el precio que debe fijar por rollo para que el comprador pague lo menos posible y que él pueda satisfacer sus pretenciones.

Solución

1. Llamemos x_1 a la cantidad de colchas Súper que debe fabricar, y x_2 a la cantidad de colchas Estándar. Las restricciones de stock son: para el cuero, $4x_1 + 2x_2 \leq 16$, y para la gamuza, $3x_1 + x_2 \leq 9$.
La función ganancia es $f = 42x_1 + 18\,x_2$. El problema entonces es:

$$\text{MAXIMIZAR } f = 42x_1 + 18x_2 \text{ sujeta a } \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 16 & \text{(restricción de stock por el cuero)} \\ 3x_1 + x_2 \leq 9 & \text{(restricción de stock por la gamuza)} \\ x_1 \geq 0 & \\ x_2 \geq 0 & \end{cases}.$$

La tabla inicial es:

x_1	x_2	s_1	s_2		
4	2	1	0	16	s_1
3	1	0	1	9	s_2
42	18	0	0	f	

Elegimos como pivote $a_{21} = 3$ y pivoteamos:

x_1	x_2	s_1	s_2		
4	2	1	0	16	s_1
$\boxed{1}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	3	s_2
42	18	0	0	f	

$\sim$

x_1	x_2	s_1	s_2		
0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{-4}{3}$	4	s_1
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	3	x_1
0	4	0	-14	$f - 126$	

Como queda un indicador positivo, debemos seguir pivoteando. Ahora el pivote es $a_{12} = \frac{2}{3}$
:

x_1	x_2	s_1	s_2		
0	$\boxed{1}$	$\frac{3}{2}$	-2	6	x_2
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	3	x_1
0	4	0	-14	$f-126$	

~

x_1	x_2	s_1	s_2		
0	1	$\frac{3}{2}$	-2	6	x_2
1	0	$\frac{-1}{2}$	1	1	x_1
0	0	-6	-6	$f-150$	

Entonces, para maximizar la función ganancia debe fabricar 1 colcha Súper y 6 Estándar.

La ganancia máxima será de $\$150$.

2. Las incógnitas ahora son a cuánto debe vender cada rollo de cuero y a cuánto cada rollo de gamuza.
Sean y_1 e y_2 los precios de cada tipo de rollo.
La función a minimizar es cuánto va a gastar el comprador: $g = 16y_1 + 9y_2$.
Veamos las restricciones. El ex fabricante de colchas usaba 4 rollos de cuero y 3 de gamuza para fabricar una colcha Súper, por la cual obtenía $42. Entonces ahora tenemos la restricción: $4y_1 + 3y_2 \geq 42$. Para las Estándar usaba 2 y 1 y obtenía $18. Entonces, debemos agregar la restricción: $2y_1 + y_2 \geq 18$.
El problema ahora es:

MINIMIZAR $g = 16y_1 + 9y_2$ sujeta a
$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 \geq 42 & \text{(pretención por lo que ganaba con las "Sup} \\ 2y_1 + y_2 \geq 18 & \text{(pretención por lo que ganaba con las "Estár} \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases}$$

Dejamos como ejercicio verificar -por método gráfico- que el mínimo se alcanza en $y_1 = 6,\ y_2 = 6$, siendo $g(6,6) = 150$.
Observemos que el

$$\max f = \min g.$$

Este hecho no es casual, ya que ambos problemas están estrechamente relacionados. Veremos cómo es el esquema general que los incluye.

Problemas duales

Escribamos matricialmente los problemas anteriores. (Las desigualdades entre vectores se interpretan coeficiente a coeficiente.)
El problema 1 es:

MAXIMIZAR $f = (42,18)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ sujeta a $\begin{cases} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 16 \\ 9 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$.

El problema 2 es:

MINIMIZAR $g = (16,9)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ sujeta a $\begin{cases} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 42 \\ 18 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$.

Estos problemas son *problemas duales*: observemos primero cómo se puede construir uno a partir del otro.
Los tipos de colchas y los materiales con que están construidas ¨han invertido roles¨.
En el primero, las restricciones son de stock (materiales), y las variables representan colchas.
En el segundo, las restricciones hacen referencia a los precios de las colchas, y las variables representan los precios de los materiales.
El teorema que viene a continuación muestra cómo son en general los problemas duales.
Más aún, *muestra la relación entre las soluciones de ambos.*

Teorema de Dualidad

Si $A \in R^{mxn}$, $X = (x_1,\ldots,x_n)$, $Y = (y_1,\ldots,y_m)$, $\mathbf{b} = (b_1,\ldots,b_m)$, $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_n)$ los problemas

$$\text{MAXIMIZAR} \quad f = \mathbf{c}X^t \quad \text{sujeto a} \quad R = \begin{cases} AX^t \leq \mathbf{b}^t \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{MINIMIZAR} \quad g = \mathbf{b}Y^t \quad \text{sujeto a} \quad R^* = \begin{cases} A^tY^t \geq \mathbf{c}^t \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

se llaman *problemas duales* y se verifica que

$$\boxed{X_0 \text{ es solución óptima de } f \text{ si y sólo si } Y_0 \text{ es solución óptima de } g}$$

siendo:

$$f(X_0) = g(Y_0)$$

Notar que *las regiones de factibilidad de ambos problemas no coinciden*.
En general, suele llamarse R a la región del problema original -que puede ser tanto el de máximo como el de mínimo- y R^* a la región del problema dual; así mismo, si f es la función del problema original, la del problema dual suele notarse f^*.

Ejemplos

1. Hallar, por el método símplex, el MÍNIMO de $g = 3y_1 + 2y_2$ sujeta a

$$R = \begin{cases} 5y_1 + y_2 \geq 10 \\ 2y_1 + 2y_2 \geq 12 \\ y_1 + 4y_2 \geq 12 \\ y_1 \geq 0 \text{ , } y_2 \geq 0 \end{cases} .$$

Solución:
Usando la notación matricial, podemos poner:

$$g = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ R = \left\{ \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \\ Y \geq 0 \end{array} \right. .$$

El problema dual es:

$$\text{MAXIMIZAR } f = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{sujeto a } R^* = \left\{ \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right. ,$$

.

o, equivalentemente, es:

$$\text{MAXIMIZAR } f = 10x_1 + 12x_2 + 12x_3 \text{ en la región } R^* = \left\{ \begin{array}{c} 5x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 2 \\ x_1 \geq 0 \text{ , } x_2 \geq 0 \text{ , } x_3 \geq 0 \end{array} \right. .$$

Resolvemos $\boxed{\text{este último}}$ problema.

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
5	2	1	1	0	3	s_1
1	2	4	0	1	2	s_2
10	12	12	0	0	f	

$\sim$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
$\boxed{1}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	s_1
1	2	4	0	1	2	s_2
10	12	12	0	0	f	

$\sim$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
$\boxed{1}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	x_1
0	$\frac{8}{5}$	$\frac{19}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	s_2
0	8	10	-2	0	$f-6$	

$\sim$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	x_1
0	$\boxed{1}$	$\frac{19}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	s_2
0	8	10	-2	0	$f-6$	

$\sim$

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2		
1	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	x_1
0	1	$\frac{19}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	x_2
0	0	-19	-1	-5	$f-13$	

de la última fila se extrae la solución del problema dual

Las variables del problema (del mínimo) se encuentran en las columnas de las holguras del problema del máximo, pero cambiadas de signo.
Luego, la solución del dual es $\boxed{g(1,5) = 13}$.
La solución del problema del máximo es: $f(\frac{1}{4}, \frac{7}{8}, 0) = 13$.

Ejercicios varios

1. Resolver el problema de hallar el MÍNIMO de $f = 10x_1 + 4x_2 + 6x_3$ sujeto a

$$R = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \geq 2 \\ x_1 \geq 0 \text{ , } x_2 \geq 0 \text{ , } x_3 \geq 0 \end{cases} .$$

(Observar que el sistema es de tipo $\geq$.)
Solución:
Planteamos el problema dual: MAXIMIZAR $f^* = 3y_1 + 2y_2$ sujeto a

$$R^* = \begin{cases} y_1 + y_2 \leq 10 \\ y_1 + \frac{1}{4}y_2 \leq 4 \\ y_1 + \frac{1}{2}y_2 \leq 6 \\ y_1 \geq 0 \text{ , } y_2 \geq 0 \end{cases} .$$

Se podrían renombrar las variables -si queremos que las del problema del máximo sean "x_i"- o, si no nos confunde, las variables de ambos problemas podrían ser "x_i". De todos modos, debemos responder apelando a los nombres originales.
Armamos la tabla inicial mirando el planteo del problema del máximo:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
1	1	1	0	0	10	s_1
$\boxed{1}$	$\frac{1}{4}$	0	1	0	4	s_2
1	$\frac{1}{2}$	0	0	1	6	s_3
3	2	0	0	0	f^*	

$\sim$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	$\frac{3}{4}$	1	-1	0	6	s_1
1	$\frac{1}{4}$	0	1	0	4	x_1
0	$\frac{1}{4}$	0	-1	1	2	s_3
0	$\frac{5}{4}$	0	-3	0	$f^* - 12$	

$\sim$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	$\boxed{1}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	8	x_2
1	$\frac{1}{4}$	0	1	0	4	x_1
0	$\frac{1}{4}$	0	-1	1	2	s_3
0	$\frac{5}{4}$	0	-3	0	$f^* - 12$	

$\sim$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	1	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	8	x_2
1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	2	x_1
0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	s_3
0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	$f^* - 22$	

.

Luego,

$$\boxed{\min f = 22 = f(\tfrac{5}{3}, \tfrac{4}{3}, 0)}$$

-chequear en la expresión de f. Observar que también: $\boxed{f^*(2,8) = 22.}$

2. Hallar la solución del problema dual de

$$\text{" MAXIMIZAR } f = x + y\text{, sujeta a } \begin{cases} -x + y \leq 1 \\ -x + 2y \leq 3 \\ 2x - y \leq 3 \\ x - y \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \text{. "}$$

Solución:

Primero planteamos la tabla inicial, y elegimos pivote:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		
-1	1	1	0	0	0	1	s_1
-1	2	0	1	0	0	3	s_2
2	-1	0	0	1	0	3	s_3
$\boxed{1}$	-1	0	0	0	1	1	s_4
1	1	0	0	0	0	f	

$\sim$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		
0	0	1	0	0	1	2	s_1
0	1	0	1	0	1	4	s_2
0	$\boxed{1}$	0	0	1	–2	1	s_3
1	–1	0	0	0	1	1	x_1
0	2	0	0	0	–1	$f-1$	

~

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		
0	0	1	0	0	1	2	s_1
0	0	0	1	–1	3	3	s_2
0	1	0	0	1	–2	1	x_2
1	0	0	0	1	–1	2	x_1
0	0	0	0	–2	3	$f-3$	

~

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		
0	0	1	0	0	1	2	s_1
0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\boxed{1}$	1	s_2
0	1	0	0	1	–1	1	x_2
1	0	0	0	1	–2	2	x_1
0	0	0	0	–2	3	$f-3$	

.

Observemos que el coeficiente $c_6 = 3$ es positivo, por lo tanto, debemos seguir:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4		
0	0	1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	s_1
0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1	1	s_2
0	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	3	x_2
1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	3	x_1
0	0	0	–1	–1	0	$f-6$	

Ahora sí, es tabla final. La solución de MINIMIZAR

$f^*(y_1,y_2,y_3,y_4) = y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4$ sujeta a $R^* = \begin{cases} -y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 \geq 1 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 - y_4 \geq 1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \\ y_4 \geq 0 \end{cases}$ es

$\boxed{f^*(0,1,1,0) = 6.}$

3. Una señora quiere elaborar un programa mensual de actividades que incluya clases de idiomas: inglés y portugués, y artísticas: dibujo y música. El costo de las mismas es de \$11, \$10, \$9 y \$8 respectivamente. Quiere emplear en total por lo menos 40 horas al mes y planea dedicar a las clases de idiomas por lo menos el mismo tiempo que les dedicará a las artísticas. Además, cada mes le gustaría dedicar a las clases de inglés por lo menos 4 horas más que a las de portugés. Determinar cuántas horas mensuales deberá dedicar a cada actividad para gastar lo menos posible.

Solución:
Si I, P, D y M son respectivamente las horas que le va a dedicar a cada actividad, el problema es $\boxed{\text{MINIMIZAR la función costo, } C = 11I + 10P + 9D + 8M.}$ Las restricciones son:

$$\begin{cases} I + P + D + M \geq 40 \\ I + P - D - M \geq 0 \\ I - P \qquad\quad \geq 4 \\ I \geq 0,\ P \geq 0,\ D \geq 0,\ M \geq 0, \end{cases}$$

.

El problema dual es MAXIMIZAR $C^* = 40x + 4z$ sujeta a $\begin{cases} x + y + z \leq 11 \\ x + y - z \leq 10 \\ x - y \qquad \leq 9 \\ x - y \qquad \leq 8 \\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{cases}$.

La tabla inicial es:

x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4		
1	1	1	1	0	0	0	11	s_1
1	1	–1	0	1	0	0	10	s_2
1	–1	0	0	0	1	0	9	s_3
1	–1	0	0	0	0	1	8	s_4
40	0	4	0	0	0	0	C^*	

.

eligiendo los indicadores de izquierda a derecha, en tres pasos obtenemos la tabla final:

x	y	z	s_1	s_2	s_3	s_4		
0	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	z
0	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$	y
0	0	0	0	0	1	–1	1	s_3
1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{37}{4}$	x
0	0	0	–12	–8	0	–20	$C^* - 372$	

.

Leemos la respuesta de la tabla: $\max(C^*) = 372$ en $(x,y,z) = (\frac{37}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{2})$ y $\min(C) = 372$ en $(I,P,D.M) = (12,8,0,20)$.
Entonces, para que el costo sea mínimo la mujer debe tomar

$\boxed{\text{12 horas de clases de inglés, 8 de portugués, ninguna de dibujo y 20 de música}}$.

$\boxed{\text{Su costo será de \$ 372.}}$

4. En un gimasio hay una promoción con tres bandas horarias diferenciadas: M, T y N. El costo de cada banda es, respectivamente, \$1, \$2 y \$3. Para acceder a la promoción se deben cumplir los siguientes requisitos: el uso total mensual debe ser de al menos 12 horas, el uso de las bandas T y N juntas debe ser de al menos 3 horas más que el de la M, y el uso de las bandas M y N juntas debe ser de al menos 4 horas. ¿Cuántas horas semanales conviene utilizar cada banda para minimizar el costo? ¿Cuál es ese costo?
Respuesta:

$\boxed{\text{si va 5 horas a la banda M, 8 a la T y ninguna a la N obtiene el costo mínimo, que es de \$21}}$

5. Jorge es armador de CPU, para lo cual adquiere carcazas de dos proveedores distintos, Juan y Pedro. Jorge tiene un taller en Capital y otro en Provincia, y necesita armar al menos 700 CPU en Capital y 400 en Provincia. Las carcazas de Juan, incluyendo flete, le cuestan \$30 entregadas en Capital y \$32 en Provincia, pero debe al menos comprarle 400. Las carcazas de Pedro, incluyendo flete, le cuestan \$34 entregadas en Capital y \$28 en Provincia, pero debe al menos comprarle 600. ¿Cuántas carcazas debe comprarle el armador a cada proveedor para minimizar el costo total? Observar que, a pesar de que se está preguntando por *dos* números (cuánto debe comprarle a cada proveedor), para poder resolver conviene introducir *cuatro* variables: cuánto debe comprarle a cada proveedor, *dependiendo del taller donde las recibe*.
Respuesta: $\boxed{\text{a Juan le debe comprar 500 y a Pedro 600}}$. Debe recibir todas las de Juan en Capital y las de Pedro 200 en Capital y 400 en Provincia.