

PRÁCTICA 5

Inecuaciones en R y en R^2 .

Inecuaciones en R .

Sean a, b y c son números reales. Recordemos que en R hay una relación de orden $<$ que verifica:

1. Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.
2. Si $a < b$ entonces
 - a. si $c > 0$ entonces $ac < bc$,
 - b. si $c < 0$ entonces $ac > bc$.

Regla de los signos

Por 2., tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } a > 0 \text{ y } b > 0 \text{ entonces } ab > 0 \\ \text{si } a > 0 \text{ y } b < 0 \text{ entonces } ab < 0 \\ \text{si } a < 0 \text{ y } b > 0 \text{ entonces } ab < 0 \\ \text{si } a < 0 \text{ y } b < 0 \text{ entonces } ab > 0. \end{array} \right.$$

(Si los signos son iguales, el producto es positivo, si los signos son distintos, el producto es negativo, ya que

si b es positivo, al multiplicar la primera desigualdad, esta se mantiene, si b es negativo, se invierte)

Observar que el resultado es positivo si ambos factores tienen el mismo signo, y negativo si no lo tienen.

Ejercicios

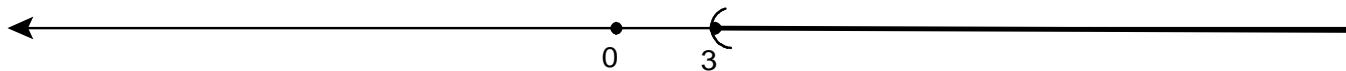
Representar en la recta real los x tales que

1. $x + 2 < 2x - 1$.
2. $-x + 2 < -2x + 4$.
3. $3x - 5 \leq x + 1 < 3x + 4$.
4. $x(x + 1) < 0$.

Para poder graficar en cada caso, primero resolvemos las inecuaciones.

Soluciones

1. Si $x + 2 < 2x - 1$ entonces $3 < x$. Marcamos en la recta todos los puntos que están a la derecha de 3:



2. Ahora: $-x + 2 < -2x + 4$. Entonces $2x - x < 4 - 2$, esto es: $x < 2$. Graficamos:



3. En este caso, en el que hay dos desigualdades, resolvemos primero una, luego la otra y finalmente vemos cuáles son los números x que cumplen ambas condiciones.

Como $3x - 5 \leq x + 1$, entonces $2x \leq 6$. Multiplicamos por $\frac{1}{2}$ ambos miembros, y como $\frac{1}{2} > 0$, la desigualdad no se altera. (Decimos que "pasamos el 2 dividiendo".) Entonces, $x \leq 3$.

Resolvemos ahora $x + 1 < 3x + 4$. Tenemos que $-3x + x < 4 - 1$, esto es: $-2x < 3$. Ahora "pasa dividiendo" -2 , y, como es negativo, cambia el sentido de la desigualdad. Tenemos entonces que $x > -\frac{3}{2}$.

Graficamos ahora ambas desigualdades. Los puntos que son solución serán los que se marquen dos veces, pues cumplen las dos condiciones.



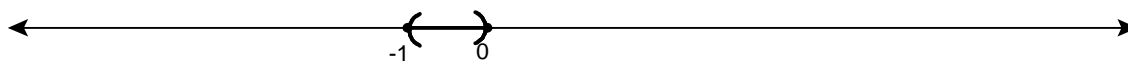
4. Si un producto debe ser negativo, entonces, los signos de los factores deben ser distintos. Luego:

a. $x < 0$ y $(x + 1) > 0$ ó

b. $x > 0$ y $(x + 1) < 0$.

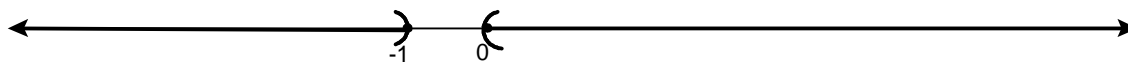
Esto es lo mismo que

1. a. $x < 0$ y $x > -1$ ó



b. $x > 0$ y $x < -1$.

No hay puntos que estén simultáneamente a la izquierda de -1 y a la derecha de 0 .



Este caso no aporta soluciones.

Los puntos que sirven provienen de a. y de b. Como b. no aporta soluciones, la solución es el intervalo $(-1; 0)$.

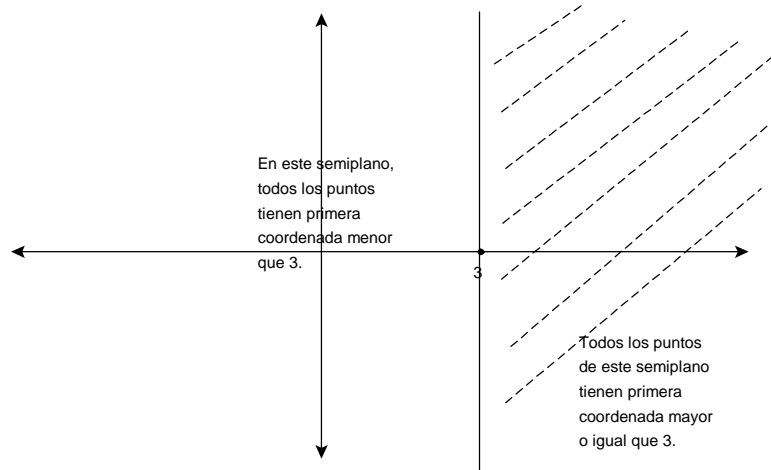
Observemos que la solución de una inecuación es una semirrecta, y la solución de dos inecuaciones simultáneas puede ser vacía, un intervalo o la unión de dos intervalos.

Inecuaciones en R^2 . Semiplanos.

Dibujar en el plano todos los pares (x,y) tales que

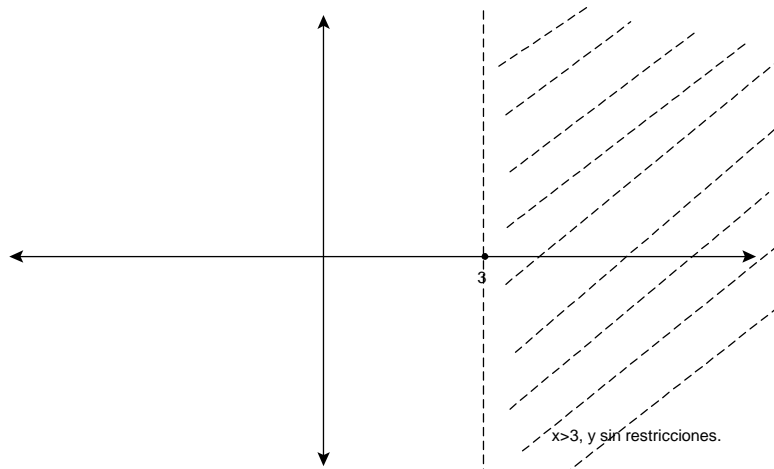
1. $x \geq 3$.

La condición afecta sólo a la primera coordenada, la segunda *puede ser cualquiera*. Gráficamente:

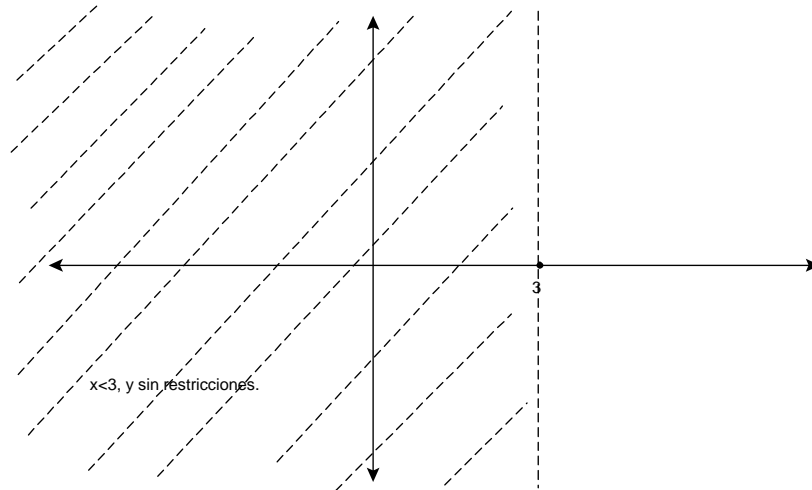


2. $x > 3$.

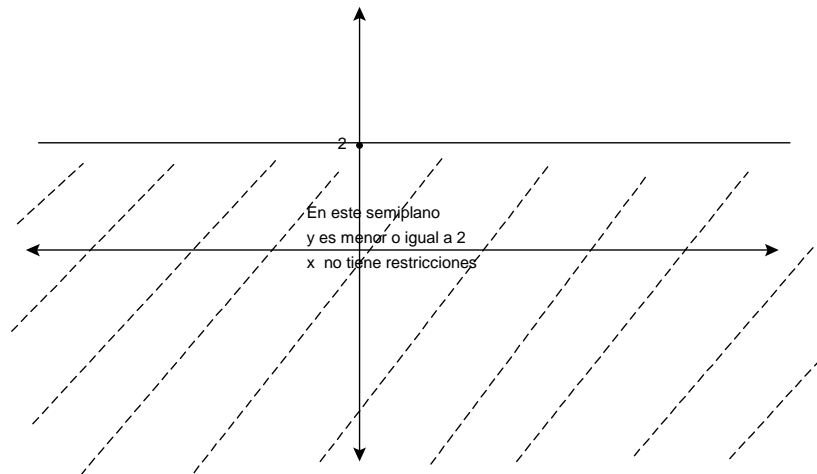
Es igual al anterior, excepto que ahora debemos excluir la recta $x = 3$. Gráficamente, en lugar de dibujarla a trazo lleno, la punteamos:



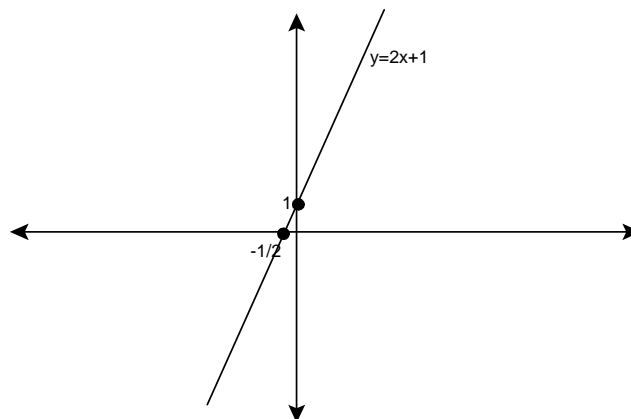
Observemos que el subconjunto del plano de los (x,y) que verifican $x < 3$ es el otro semiplano:



3. $y \leq 2$.

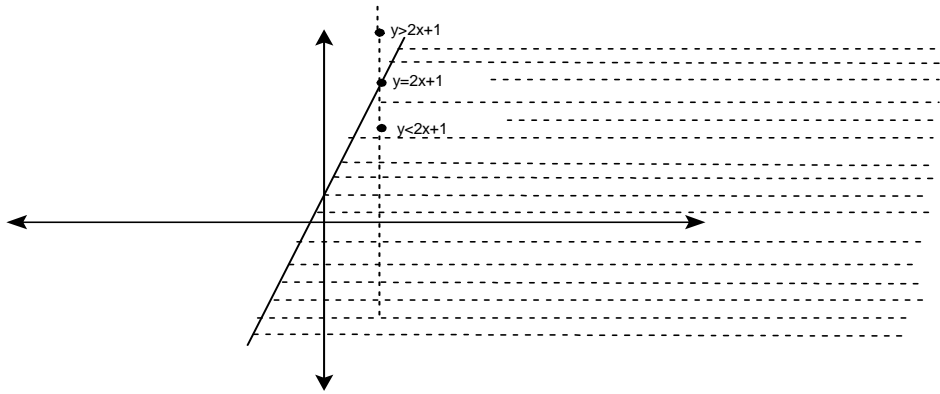


4. $y = 2x + 1$.
La solución es una recta.



5. $y \leq 2x + 1$.

Sabemos que la recta $y = 2x + 1$ está contenida en la región, debemos ver cuáles puntos son los que se agregan. Para esto, nos ayudamos trazando una recta vertical:

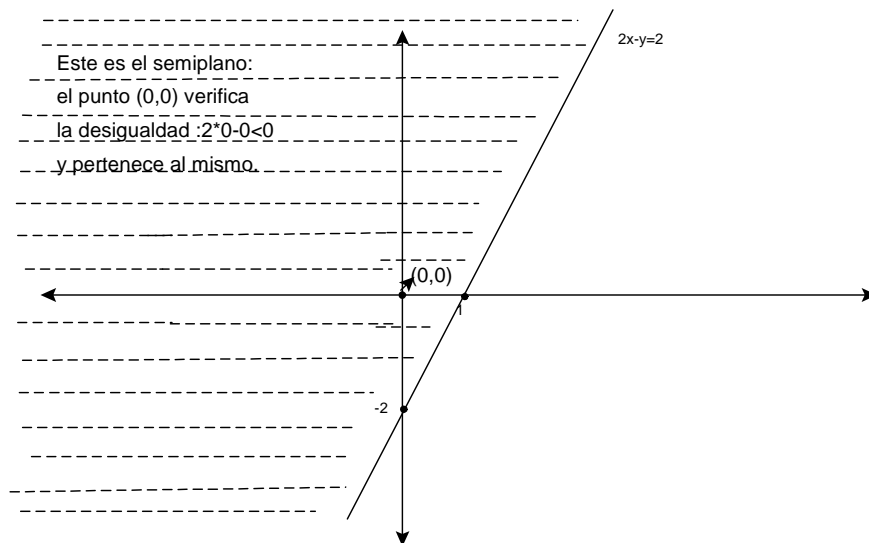


Dado $P=(x,y)$,
 si $y > 2x + 1$, P no está en la región, y
 si $y = 2x + 1$ ó $y < 2x + 1$, P está en la región.

6. $2x - y \leq 2$.

Marquemos primero la recta $2x - y = 2$ -con trazo lleno, pues nuestra desigualdad no es estricta.

El plano nos queda dividido en dos semiplanos: para ver cuál de los dos es el que verifica la desigualdad, basta con probar con un punto de alguno de ellos. Si este punto la verifica, entonces el semiplano que lo contiene es el buscado, mientras que si no la verifica, el semiplano buscado es el otro.



Sistemas de inecuaciones lineales. Región de factibilidad y puntos esquina.

Así como marcamos en una recta el conjunto solución de un sistema de inecuaciones, marcaremos ahora en el plano el conjunto solución de un sistema de inecuaciones de dos variables.

Simplemente debemos ir marcando prolijamente el conjunto solución de cada inecuación y luego ver cuál es la región del plano que se ha marcado siempre: los puntos de esta zona son exactamente los que verifican todas las inecuaciones.

Ejercicios

Encontrar el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas:

$$1. \begin{cases} 2x + 3y \leq 4 \\ 2x - y \leq 4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + 3y \leq 4 \\ 2x - y \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x - y \leq -2 \\ 2x + y \geq 8 \\ x + y \geq 7 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

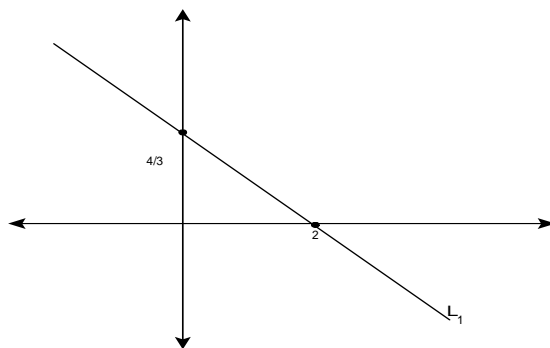
$$4. \begin{cases} x + y \geq 0 \\ x \geq -1 \\ x - y \leq 2 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + y \geq 0 \\ y \leq 1 \\ x - y \leq 2 \end{cases}$$

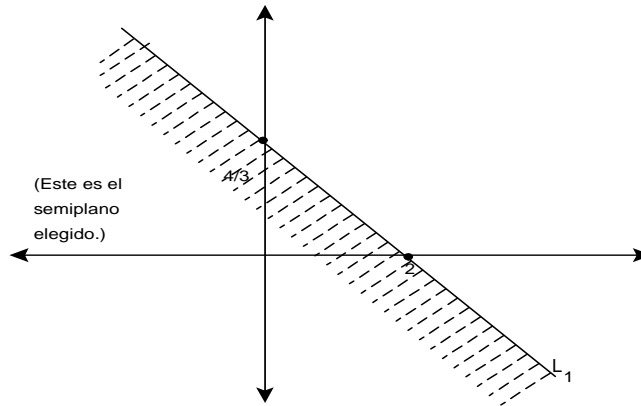
Soluciones

En todos los casos, dada una inecuación, pensaremos primero en la recta definida por la igualdad.

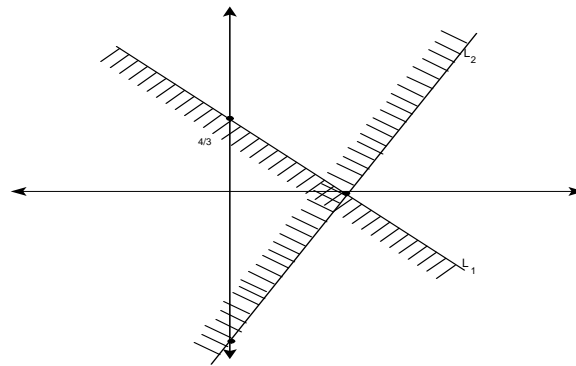
1. Primero marcamos $L_1 : 2x + 3y = 4$:



De los dos semiplanos determinados por L_1 , elegimos el que se corresponde con $2x + 3y \leq 4$: observemos que el punto $(0, 0)$ verifica $2 * 0 + 3 * 0 = 0 \leq 4$. Elegimos entonces el semiplano que contiene el origen. Lo marcamos sombreando de la siguiente manera:

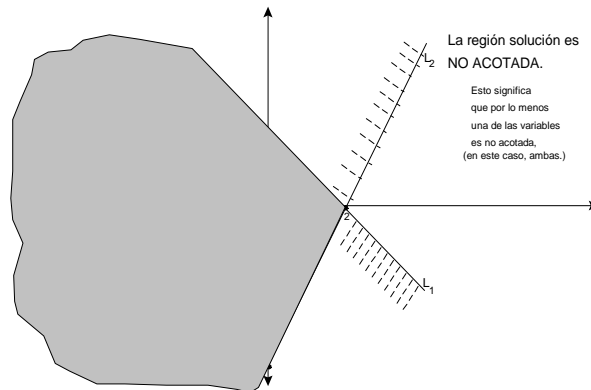


(Rayamos sólo lo suficiente para entender de qué semiplano se trata, el sombreado completo lo hacemos recién al finalizar.)
 Ahora dibujamos $L_2 : 2x - y = 4$ y marcamos el semiplano dado por $2x - y \leq 4$.



La solución es la parte del plano "señalada" las dos veces. (Se entiende el por qué de las líneas cortas: si no fueran así, a medida que hay más semiplanos marcados, van quedando tantas líneas superpuestas que es muy difícil visualizar la solución.)

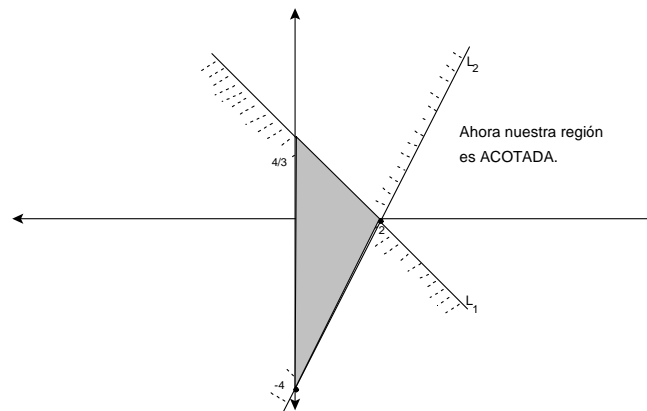
La región buscada es:



El punto donde se intersecan L_1 y L_2 se llama *punto esquina* de la región. Entonces, $(2,0)$ es punto esquina.

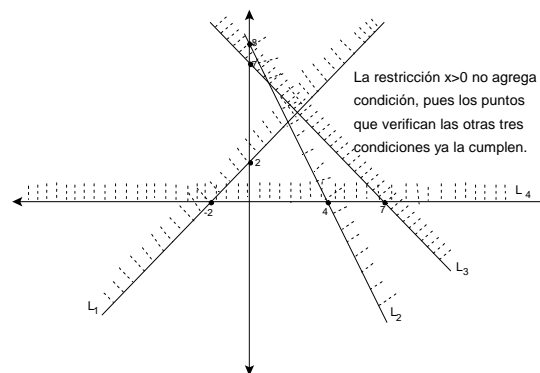
2. Observemos que las dos primeras desigualdades son las mismas que en el

caso anterior, pero ahora agregamos la condición $x \geq 0$.

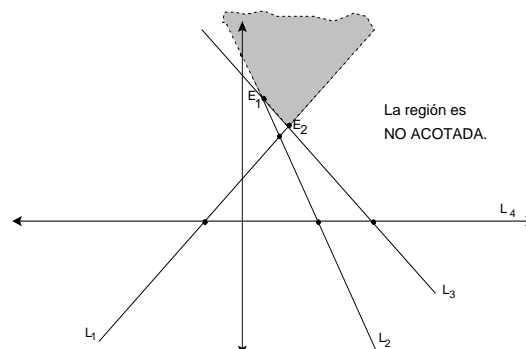


Cuando la región es acotada, diremos que se trata de un polígono. En este caso, los puntos esquina son los *vértices* del polígono. En este caso, el polígono es un triángulo y sus vértices son los puntos $(2, 0)$, $(0, -4)$ y $(0, 4/3)$.

3. Como antes, marcamos primero las rectas L_1 , L_2 , L_3 y L_4 dadas por las igualdades. Al marcar cada una, indicamos cuál es el semiplano dado por la correspondiente desigualdad.

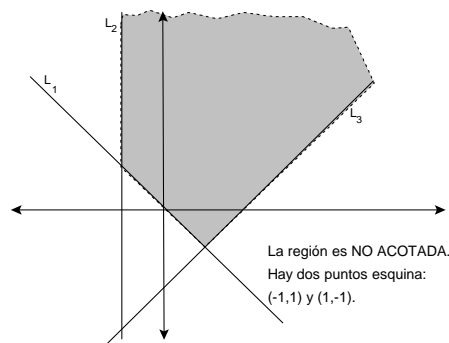


Remarcamos la solución:

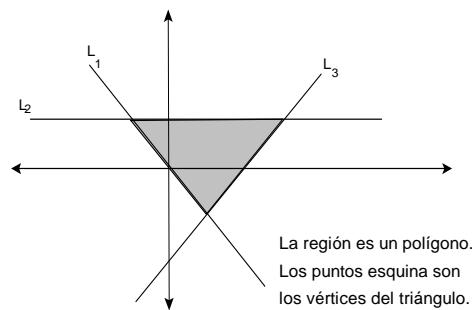


Los puntos donde se intersecan por lo menos dos de las rectas que definen la región están marcados en el último dibujo. Sin embargo, no todos están en la zona que es solución. Aprovechamos el ejercicio para dar las siguientes definiciones:

- a. Los puntos que cumplen con todas las restricciones se llaman *puntos de factibilidad*.
 - b. El conjunto de puntos de factibilidad se llama *región de factibilidad*. En este caso, es la región sombreada.
 - c. Un *punto esquina* es un punto que está en la región de factibilidad y en por lo menos dos de las rectas que limitan la región. En el gráfico, los hemos indicado como E_1 y E_2 . Observemos que si definimos puntos esquina como los puntos de intersección de por lo menos dos de las rectas que limitan la región, en este caso habría 6 puntos esquina; sin embargo, sólo dos de ellos son puntos de factibilidad.
4. Procediendo como antes, obtenemos:



5. Ahora:



Aplicación

La Compañía Andina fabrica dos modelos de camperas con tela avión (TA) y cuero (C). Tanto TA como C vienen en piezas de ancho fijo y se dispone de 378 m de TA y 150 m de C.

Para confeccionar una campera "Escalador" se necesitan 2 m de TA y 0.7 m de cuero.

Para confeccionar una campera "Caminante" se necesitan 4 m de TA y 1.20 de cuero.

Representar la región de factibilidad y determinar los puntos esquina.

Solución

Pretendemos averiguar cuántas camperas de cada tipo podemos fabricar con el stock

dado, pudiendo no usarse todo. Llamemos:

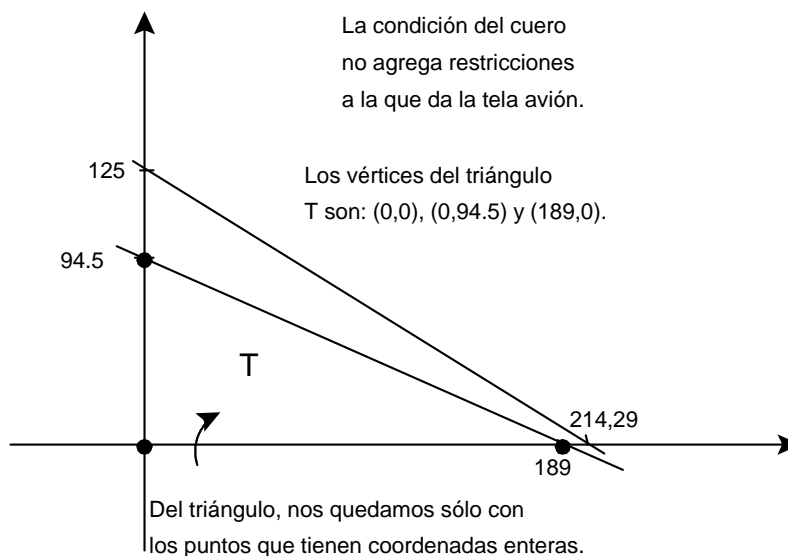
x a la cantidad de camperas "Escalador" que vamos a fabricar,
 y a la cantidad de camperas "Caminante".

La restricción de TA es $2x + 4y \leq 378$, la de C es $0.7x + 1.20y \leq 150$.

Planteamos entonces el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 4y \leq 378 \\ 0.7x + 1.20y \leq 150 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Las restricciones de positividad se deben a que las variables representan cantidades. En realidad, estas variables representan números enteros, pues se refieren a cantidad de camperas. Gráficamente:



Los puntos factibles son los pares de números enteros que están en el interior de T .

Programación lineal en el plano: máximos y mínimos

Función lineal y curvas de nivel

Problema

Una compañía fabrica los productos A y B . El producto A se vende a \$12 por unidad y el B a \$8.

Expresar el monto de entradas diarias en función de las ventas de cada producto. ¿Cuánto se vende de cada uno si se obtiene una entrada de \$100?

Solución

Llamemos x a la cantidad de unidades de A vendidas diariamente, e y a la cantidad de unidades vendidas de B .

Entonces, el monto de entradas diarias es

$$z = 12x + 8y.$$

En general, una *función lineal de dos variables* es una función

$$z = ax + by$$

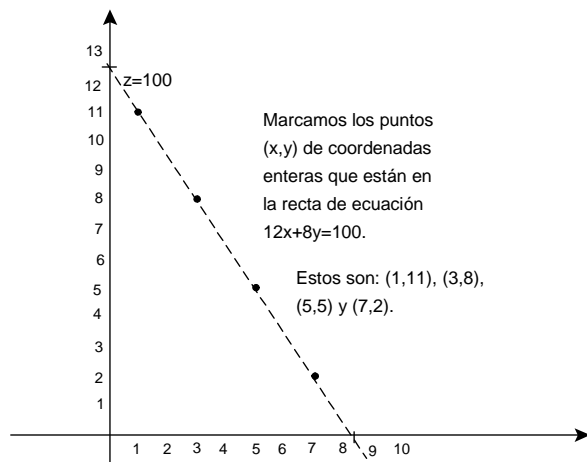
donde a y b son números reales.

Si se venden \$100, entonces $100 = 12x + 8y$. En el plano, esto representa una recta. Como x e y representan unidades de productos, sus valores posibles son $0, 1, 2, \dots$.

Observemos que los valores posibles de x son $0, 1, \dots, 8$ (ya que $12 * 9 = 108 > 100$). Para cada valor posible de x , nos fijamos si $y = \frac{100-12x}{8}$ es entero:

1. $x = 0$ entonces $y = \frac{100-12*0}{8} = \frac{25}{2}$
2. $x = 1$ entonces $y = \frac{100-12*1}{8} = 11$
3. $x = 2$ entonces $y = \frac{100-12*2}{8} = \frac{19}{2}$
4. $x = 3$ entonces $y = \frac{100-12*3}{8} = 8$
5. $x = 4$ entonces $y = \frac{100-12*4}{8} = \frac{13}{2}$
6. $x = 5$ entonces $y = \frac{100-12*5}{8} = 5$
7. $x = 6$ entonces $y = \frac{100-12*6}{8} = \frac{7}{2}$
8. $x = 7$ entonces $y = \frac{100-12*7}{8} = 2$
9. $x = 8$ entonces $y = \frac{100-12*8}{8} = \frac{1}{2}$

Gráficamente:



1. La recta $12x + 8y = 100$ es una *curva de nivel* de la función lineal z . La notaremos z_{100} .

Si nos hubieran pedido los puntos (x,y) donde $z = 200$ habríamos dibujado la curva de nivel z_{200} .

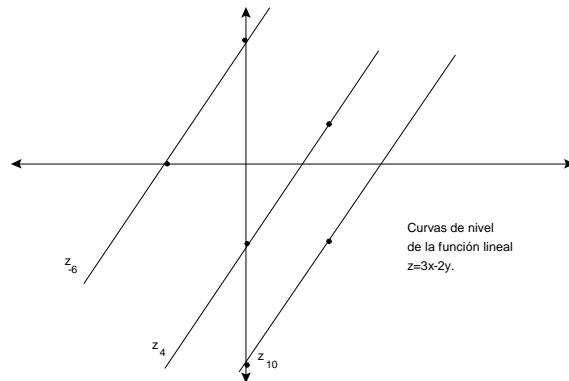
En general, dada una función lineal $z = ax + by$, los puntos (x,y) tales que $ax + by = c$ están en la curva de nivel c de z .

Ejercicio

Para la función lineal $z = 3x - 2y$ dibujar las curvas de nivel $z = 10$, $z = 4$, $z = -6$.

Solución

Debemos graficar las rectas $10 = 3x - 2y$, $4 = 3x - 2y$ y $-6 = 3x - 2y$.

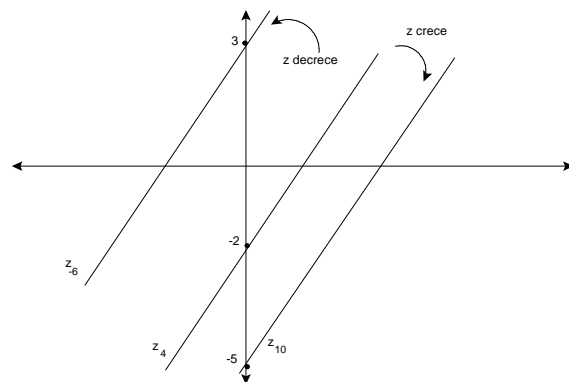


Observemos que las curvas de nivel de una función lineal de dos variables son rectas paralelas.

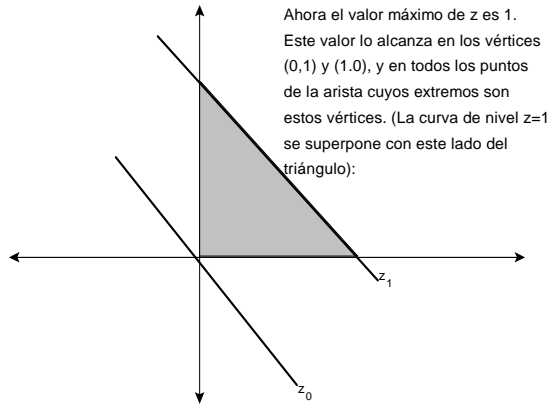
Por ejemplo en este caso tenemos que si $z = 3x - 2y$, entonces $y = \frac{3}{2}x - \frac{z}{2}$: todas tienen pendiente $\frac{3}{2}$.

La ordenada al origen depende justamente de cuál es la curva de nivel de z que estamos trazando..

Asignándole distintos valores a z , observemos el siguiente comportamiento de las curvas de nivel:



En general, marcando dos curvas de nivel podemos deducir "para qué lado" z crece y "para qué lado" z decrece .



Ejercicios

Calcular los valores máximos y mínimos que toma la función objetivo z sobre la región R en los siguientes casos:

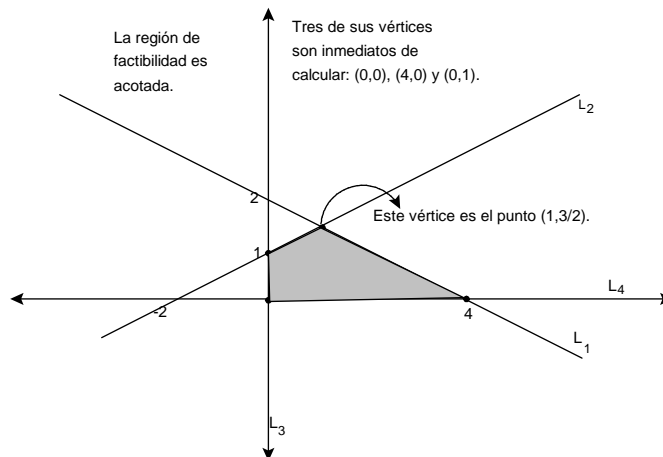
$$1. \quad z = x - 3y, \quad R : \begin{cases} 8x + 16y \leq 32 \\ -4x + 8y \leq 8 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases}$$

$$2. \quad z = -x + y, \quad R : \begin{cases} 5x + 10y \leq 20 \\ x - 4y \leq 4 \\ x - y \geq -2 \end{cases}$$

$$3. \quad z = -2x + y, \quad R : \begin{cases} x - y \leq -3 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$$

Soluciones

1. Primero graficamos la región de factibilidad.



Ahora agregamos las curvas de nivel de z . Para no confundirlas con las rectas ya dibujadas, dibujamos las curvas de nivel con un trazo cortado. Para saber qué curvas de nivel pasan por la región, podemos evaluar la función objetivo en los vértices:

Vértice	$z=x-3y$
(0,0)	0
(4,0)	4
(1,3/2)	-7/2
(0,1)	-3

Como $z(0,0) = 0$, la curva de nivel z_0 pasa por (0,0).

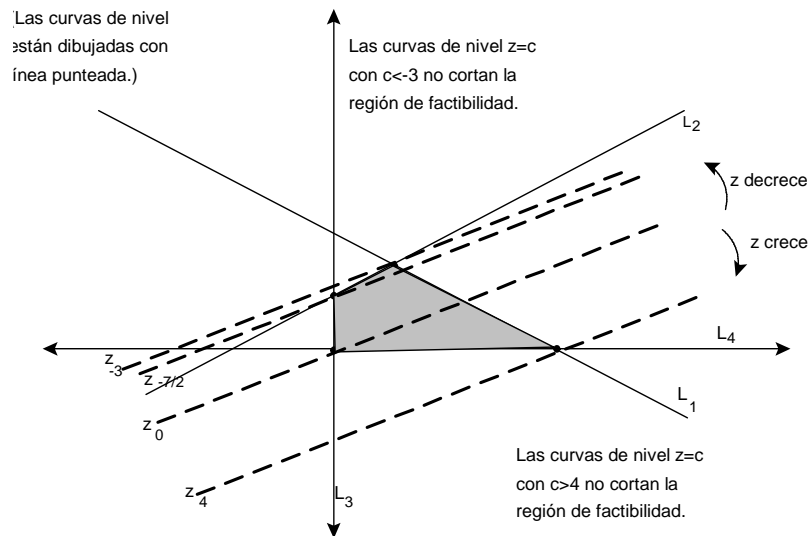
Análogamente:

como $z(4,0) = 4$, la curva de nivel z_4 pasa por (4,0),

como $z(1,3/2) = -7/2$, la curva de nivel $z_{-7/2}$ pasa por (1, 3/2)

y como $z(0,1) = -3$, la curva de nivel z_{-3} pasa por (0,1).

Graficamos:



Las curvas de nivel pueden pensarse como rectas que se va moviendo conservando la misma dirección.

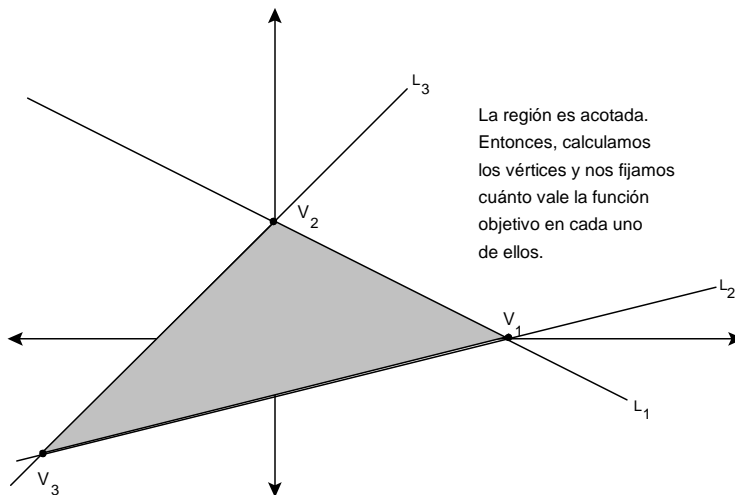
En un sentido, el valor de z aumenta, en el otro, disminuye.

Vemos en nuestro ejemplo que el valor máximo lo alcanzó en el vértice (4,0), siendo $z(4,0) = 4$, y que el valor mínimo lo alcanzó también en un vértice:

$$z(1,3/2) = -7/2.$$

Se puede demostrar que, en general, *en el caso de una región acotada* los valores máximos y mínimos siempre se alcanzan en un vértice, por lo cual, en este caso, no es necesario el trazado de las curvas de nivel: basta con hacer una tabla como la de más arriba y elegir el valor máximo y el valor mínimo que aparezcan en la misma.

2. Dibujamos la región:



Calculamos analíticamente los vértices:

a. V_1 : solución de $\begin{cases} 5x + 10y = 20 \\ x - 4y = 4 \end{cases}$. Es $V_1 = (4, 0)$

b. V_2 : solución de $\begin{cases} 5x + 10y = 20 \\ x - y = -2 \end{cases}$. Es $V_2 = (0, 2)$

c. V_3 : solución de $\begin{cases} x - 4y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases}$. Es $V_3 = (-4, -2)$

Hacemos la tabla:

Vértice	$z = -x + y$	
$(4, 0)$	-4	: valor mínimo
$(0, 2)$	2	: valor máximo
$(-4, -2)$	2	: valor máximo

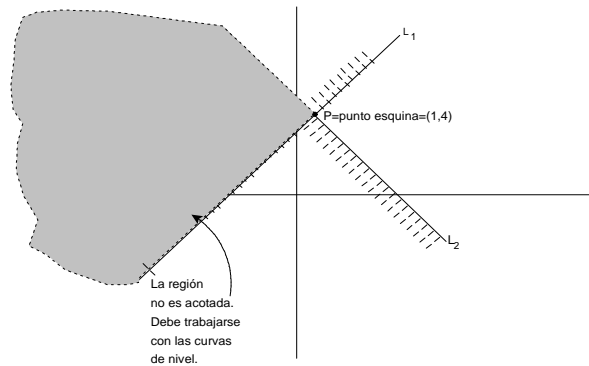
Esto

es: el valor mínimo se alcanza en el punto $(4, 0)$, siendo este valor $z = -4$

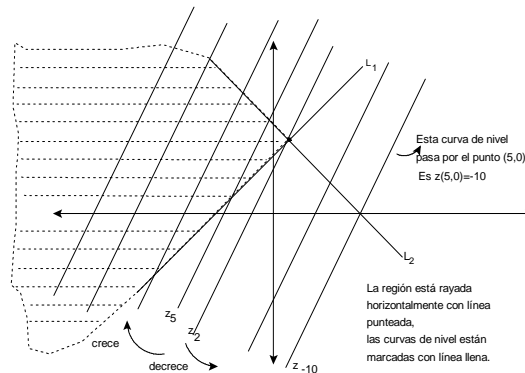
El valor máximo se alcanza en dos vértices. Esto implica que se alcanza en toda la arista de extremos V_2 y V_3 (ver el ejemplo del inicio de la clase donde la región es un triángulo). Escribiremos

esto: el máximo de la función es $z = 2$ en $\overline{V_2V_3}$.

3. Graficamos R :



¿Cuál es la curva que pasa por el punto esquina? Es $z(1,4) = -2 * 1 + 4 = 2$.
 Graficamos entonces z_2 -esto es, la recta $2 = -2x + y$. Luego vemos para qué lado z aumenta y para qué lado z disminuye.



Concluimos que

el valor mínimo se toma en el punto esquina $(1,4)$, siendo $z(1,4) = 2$.

z no alcanza máximo pues las curvas de nivel $z = c$ cortan la región si $c > 2$.

Resumen

El problema de optimizar una función lineal (encontrar máximos y mínimos) cuando las variables están restringidas por un sistema de condiciones lineales se llama *programa lineal*.

Las restricciones pueden ser inecuaciones o ecuaciones lineales, y determinan la *región de factibilidad*.

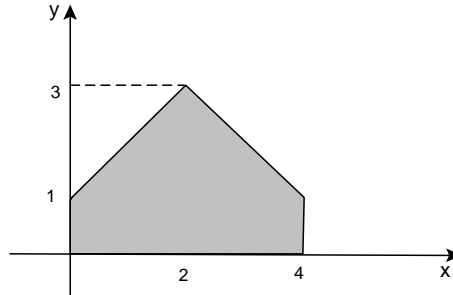
La función a ser optimizada se llama *función objetivo*.

Si la región es un *polígono*, *el máximo y el mínimo se alcanzan seguro en algún vértice*. En este caso, basta entonces calcular los vértices y evaluar z en los mismos. Si el máximo se alcanza en dos vértices, entonces se alcanza en la arista que estos determinan. Lo mismo para el mínimo.

Si la región *no es acotada*, *hay que trabajar con las curvas de nivel de z* . Puede presentarse cualquier situación: que no exista ni máximo ni mínimo, que exista sólo uno de ambos, o que existan los dos.

Algunos ejercicios más

1. Determinar una función lineal $z = \alpha x + \beta y$ tal que el máximo de z sobre el polígono sombreado se alcance en todo el segmento que une $(2, 3)$ y $(4, 1)$. ¿Cuál es el valor máximo?



2. Sea $z = \alpha x + \beta y$ y D la región de factibilidad determinada por

$$\begin{cases} x + 3y \leq 1 \\ -x + 2y \leq 4 \\ x \geq -3 \\ y \geq 0 \end{cases} .$$

- Graficar la región de factibilidad y encontrar los vértices.
- Encontrar, si existen, un valor de α y un valor de β tales que el máximo de z sobre la región de factibilidad se alcance en el vértice $(1, 0)$ y el mínimo en el vértice $(-3, 0)$.

3. Calcular, si existen, el máximo y el mínimo de $z = -2x + y$, sujeta a

$$\begin{cases} y \geq x + 1 \\ x \geq 0 \end{cases} .$$

4. El dueño de un lavadero compra semanalmente suavizante y jabón líquido. Cada semana usa por lo menos 10 litros de suavizante y 16 litros de jabón. Debe comprar por lo menos 30 litros en total y puede almacenar a lo sumo 100 litros. El litro de suavizante cuesta \$2 y el litro de jabón \$1,30. ¿Cuántos litros de cada producto debe comprar para minimizar su gasto?

Soluciones

1. Por ser la región un polígono, z alcanza su máximo y su mínimo en los vértices. En la siguiente tabla calculamos el valor que toma z en éstos:

Vértice	$z = ax + \beta y$
(0,0)	0
(1,0)	α
(2,3)	$2\alpha + 3\beta$
(4,1)	$4\alpha + \beta$
(4,0)	4α

Para que se cumpla lo pedido, se debe verificar que z alcance el mismo valor en los vértices (2,3) y (4,1).

Entonces, $2\alpha + 3\beta = 4\alpha + \beta$. Despejando, $\beta = \alpha$. Reescribimos la tabla anterior:

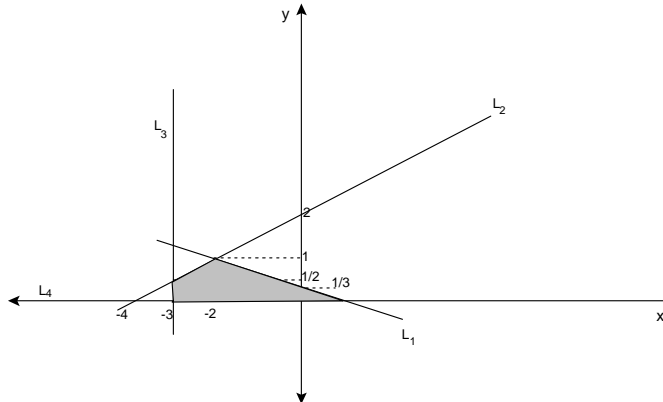
Vértice	$z = ax + \beta y$
(0,0)	0
(1,0)	α
(2,3)	5α
(4,1)	5α
(4,0)	4α

Si $\alpha > 0$, el máximo valor que alcance z será 5α . Por ejemplo, podemos tomar $\alpha = 1$, entonces (como $\beta = \alpha$) $\beta = 1$ y $z = x + y$.

El máximo valor que alcanza z es 5.

2.

- a. Graficamos la región, dejando como ejercicio el cálculo de los vértices (que aparecen en la tabla del inciso b):



- b. Nuevamente, para hacer los cálculos para ver dónde z alcanza su valor máximo y su valor mínimo, es conveniente hacer una tabla.

Vértice	$z = \alpha x + \beta y$
$(-3, 0)$	-3α
$(-3, 1/2)$	$-3\alpha + \frac{\beta}{2}$
$(-2, 1)$	$-2\alpha + \beta$
$(1, 0)$	β
$(0, 0)$	0

Nos piden hallar valores de α y β para que el máximo sea β y el mínimo sea -3α . Entonces, se deben verificar las siguientes desigualdades:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta \geq -3\alpha \\ \beta \geq -3\alpha + \frac{\beta}{2} \\ \beta \geq -2\alpha + \beta \\ \beta \geq 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} -3\alpha \leq -3\alpha + \frac{\beta}{2} \\ -3\alpha \leq -2\alpha + \beta \\ -3\alpha \leq \beta \\ -3\alpha \leq 0 \end{array} \right\}$$

Obervemos que no nos piden todos los valores posibles sino *algún* α y β que las verifiquen. Si, por ejemplo, $\beta = 1$ (ya que debe ser positivo) obtenemos las condiciones:

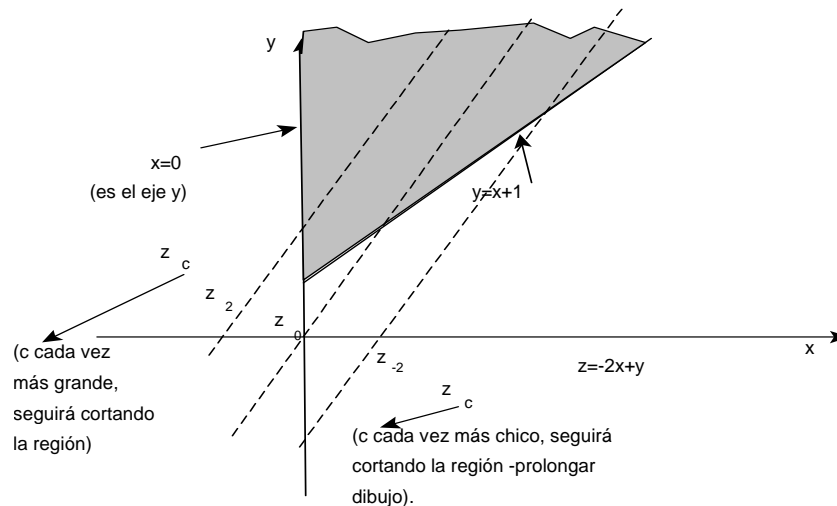
$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \geq -3\alpha \\ \frac{1}{2} \geq -3\alpha \\ 0 \geq -2\alpha \\ 1 \geq 0 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \frac{1}{2} \\ -\alpha \leq 1 \\ -3\alpha \leq 1 \\ -3\alpha \leq 0 \end{array} \right\}$$

Cualquier $\alpha \geq 0$ hace que se verifiquen todas las desigualdades.

Tomamos entonces $\alpha = 1$ y $\beta = 1$. Podemos verificar que los valores hallados cumplen con lo pedido:

Vértice	$z = x + y$
$(-3, 0)$	-3 : valor mínimo
$(-3, 1/2)$	$-3 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$
$(-2, 1)$	$-2 + 1 = -1$
$(1, 0)$	1 : valor máximo
$(0, 0)$	0

3. Graficamos la región y las curvas de nivel:



Por lo visto en el gráfico, z no alcanza ni máximo ni mínimo.

Observemos que hay una manera alternativa de probar esto, y es "caminando por los bordes".

si restringimos z a la recta $y = x + 1$, (esto es, calculamos $z(x, x + 1)$), obtenemos $z = -2x + x + 1 = -x + 1$. Como la variable x toma valores positivos tan grandes como querramos (no está acotada), $z = -x + 1$ toma valores tan chicos como querramos: no alcanza mínimo.

Si ahora nos restringimos al eje y (ponemos entonces $x = 0$), $z = y$. Como y toma valores positivos tan grandes como querramos, z tampoco alcanza máximo.

4. Llamemos x a la cantidad de litros de suavizante que va a comprar, e y a la cantidad de litros de jabón líquido.

La primera condición que deben cumplir es $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Como cada semana usa por lo menos 10 litros de suavizante y 16 litros de jabón, se debe cumplir que $x \geq 10$ e $y \geq 16$.

Como debe comprar por lo menos 30 litros en total, $x + y \geq 30$.

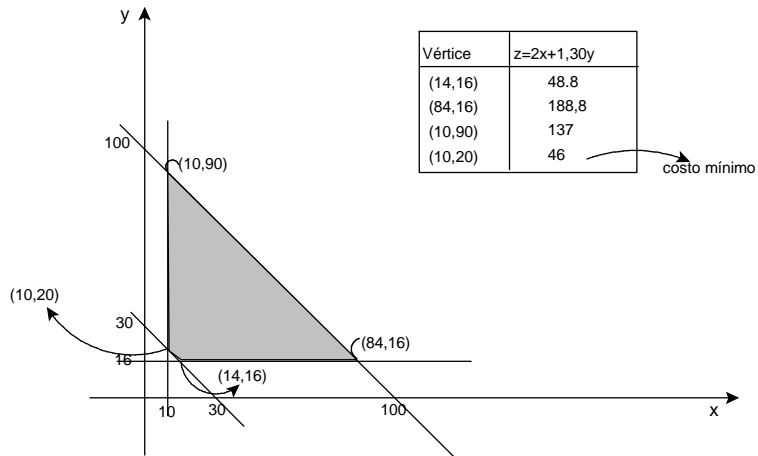
Como puede almacenar a lo sumo 100 litros, $x + y \leq 100$.

La función costo es $z = 2x + 1,30y$.

El problema a resolver es entonces:

$$\text{minimizar } z = 2x + 1,30y, \text{ sujeta a } \begin{cases} x \geq 10 \\ y \geq 16 \\ x + y \geq 30 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} .$$

Resolvemos usando el método gráfico:



Entonces, debe comprar 10 litros de suavizante y 20 de jabón líquido para cumplir con todos los requisitos, gastando lo mínimo.

El costo será de \$46.