PRÁCTICA 4

Matrices

Sabemos ya que R^{mxn} es el conjunto de matrices con coeficientes reales, de m filas y n columnas.

Por ejemplo, $R^{2x3} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \ / \ a_{ij} \in R, \quad i = 1,2, \quad j = 1,2,3 \right\}.$

Ejercicios

1. Escribir la matriz $A \in R^{4x3}$ tal que $a_{ij} = i + j + 2$ para $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 3$.

2. Lo mismo para $B \in R^{3x3}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$.

3. Escribir tres elementos del conjunto
$\mathcal{A} = \left\{ A \in R^{3x3} \ / \ a_{ij} = 0 \ \ si \ \ i \neq j, \ a_{ii} = k, \ k \in R. \right\}$.

Soluciones

1. Calculamos los coeficientes de la matriz pedida. Para ayudarnos, indicamos esta vez en qué fila y columna está cada coeficiente:

$i \downarrow, j \rightarrow$	columna j
fila i	$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \underbrace{\quad}_{}^{1} & \underbrace{\quad}_{}^{2} & \underbrace{\quad}_{}^{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \underset{\to}{1} \\ \underset{\to}{2} \\ \underset{\to}{3} \\ \underset{\to}{4} \end{array} & \begin{pmatrix} 1+1+2 & 1+2+2 & 1+3+2 \\ 2+1+2 & 2+2+2 & 2+3+2 \\ 3+1+2 & 3+2+2 & 3+3+2 \\ 4+1+2 & 4+2+2 & 4+3+2 \end{pmatrix} \end{array}$

Calculando:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

2. De la misma manera, calculamos la matriz B. Ahora:

$$B = \begin{array}{cc} i \downarrow, j \rightarrow & \begin{array}{ccc} \underbrace{1} & \underbrace{2} & \underbrace{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \underset{\to}{1} \\ \underset{\to}{2} \\ \underset{\to}{3} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Esta matriz se llama *matriz identidad* de R^{3x3}, y la notamos I_3. Esto es:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En todo conjunto de *matrices cuadradas* R^{nxn} se puede definir la matriz identidad I_n: sus coeficientes serán 1 los de la diagonal y el resto serán todos 0. Por ejemplo:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces tiene todos sus elementos "0", excepto en la diagonal, que son todos iguales a un escalar k. Una matriz de esta forma se llama *matriz escalar*. Son matrices escalares:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operaciones en R^{mxn}

Suma:

Al igual que en el caso de los vectores, se suma coeficiente a coeficiente.

Ejemplo: si $A,B \in R^{2x3}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

En general, si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ entonces

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Producto por un escalar

Si $k \in R$ y $A = (a_{ij})$ entonces

$$kA = (ka_{ij}).$$

Ejemplo:

$$3\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -6 & 15 \end{pmatrix}.$$

Propiedad

Es inmediato verificar que R^{mxn} con las operaciones recién definidas es un espacio vectorial.

Si $m = 1$, $A, B \in R^{1xn}$ (matrices de una fila y ene columnas). Sumar A y B como matrices coincide con la suma como vectores: lugar a lugar. También coincide la multiplicación de un escalar con una matriz de una fila: se multiplica por el escalar cada coeficiente de la matriz (vector).

Ejercicios

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ calcular $-A$ y $2A + 3B$.

2. Calcular la dimensión de R^{2x3}.

3. Sean A y B las matrices dadas en 1 y sean C y D las matrices: $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -12 \\ 12 & -4 & 15 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -12 \\ 12 & -4 & 1 \end{pmatrix}$. Decidir si C y D se pueden escribir como combinación lineal de A y B.

4. Hallar bases y dimensión de los subespacios:

a. $\mathcal{A}_1 = \{A \in R^{2x2} \quad / \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 0\}$.

b. $\mathcal{A}_2 = \{A \in R^{3x3} \quad / \quad a_{ij} - a_{ji} = 0, \quad 1 \leq i,j \leq 3\}$.

Soluciones

1. Es

$$-A = (-1)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$2A + 3B = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 8 & -4 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 8 & -10 & 10 \end{pmatrix}.$$

2. Primero recordemos cómo encontramos la base canónica, por ejemplo, de R^2. Escribíamos $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$, de donde $R^2 = \langle(1,0),(0,1)\rangle$, después estudiábamos la independencia lineal de $\{(1,0),(0,1)\}$. El trabajo qie haremos ahora es similar. Si $A \in R^{2x3}$ entonces es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, R^{2x3} está generado por el conjunto de matrices

$$B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Además, para verificar si B es l.i. planteamos:

$$\alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \alpha_4\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_5\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_6\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pero entonces, si calculamos la expresión que está a la izquierda del signo $=$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando coeficiente a coeficiente, vemos que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$$

de donde, efectivamente, B es l.i.

Con esto, hemos probado que $\boxed{\dim R^{2x3} = 6}$. La base B se llama *base canónica* de R^{2x3}.

De la misma manera se puede ver en general que $\boxed{\dim R^{mxn} = mxn}$. De la misma manera también se puede dar la base canónica de R^{mxn}.

Por ejemplo, la base canónica de R^{2x2} es

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

3. Veamos primero si hay escalares α y β tales que

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -12 \\ 12 & -4 & 15 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Igualamos coordenada a coordenada. Debemos ver si es compatible el sistema

$$S_1 : \begin{cases} 4 = \alpha - \beta \\ 1 = \alpha + 2\beta \\ -12 = -3\alpha + 3\beta \\ 12 = 4\alpha \\ -4 = -2\alpha - 2\beta \\ 15 = 5\alpha \end{cases}.$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos $\alpha = 3$ y $\beta = -1$. Luego, chequeamos para estos valores, se verifican *todas* las ecuaciones, de donde resulta que el sistema es compatible y que $\boxed{C \text{ es combinación lineal de } A \text{ y } B}$.

Ahora planteamos lo mismo pero para la matriz D: queremos ver si tiene solución la ecuación

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -12 \\ 12 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos ahora el sistema

$$S_2 : \begin{cases} 4 = \alpha - \beta \\ 1 = \alpha + 2\beta \\ -12 = -3\alpha + 3\beta \\ 12 = 4\alpha \\ -4 = -2\alpha - 2\beta \\ 1 = 5\alpha \end{cases}$$

que es incompatible. Luego, $\boxed{D \text{ no es combinación lineal de } A \text{ y } B}$.

(Si se tienen las ideas claras, y no nos confundimos con qué objetos estamos en realidad trabajando, podemos observar que si plantearamos como ejercicio: "decidir si, en R^6, el vector $C = (4,1,-12,12,-4,15)$ es combinación lineal de los vectores $(1,1,-3,4,-2,5)$ y $(-1,2,3,0,-2,0)$" tendríamos que resolver el mismo sistema S_1. A partir de este hecho, que es general, fabricarmos una regla práctica para ver si una matriz es combinación lineal de otras: escribiéndolas como vectores y usando la regla práctica para vectores.)

a. Escribimos un elemento genérico de $\mathcal{A}_1$: si $A \in \mathcal{A}_1$ entonces es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\mathcal{A}_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Es inmediato que $\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ es una base}}$, de donde $\boxed{\dim \mathcal{A}_1 = 2}$.

(Por lo dicho antes, basta ver que $\{(1,0,0,0),(0,0,1,0)\}$ es l.i.).

b. Aclaremos primero que $1 \leq i,j \leq 3$ es una abreviatura de $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$.
La condición $a_{ij} - a_{ji} = 0, \quad 1 \leq i,j \leq 3$ significa que

$$\left\{ \begin{array}{l} 1.\ a_{11} - a_{11} = 0 \\ 2.\ a_{12} - a_{21} = 0 \\ 3.\ a_{13} - a_{31} = 0 \\ 4\ .a_{22} - a_{22} = 0 \\ 5.\ a_{23} - a_{32} = 0 \\ 6.\ a_{33} - a_{33} = 0 \end{array} \right. .$$

Las condiciones 1, 4 y 6 no imponen ninguna restricción sobre los coeficientes.
Podemos abreviar el sistema escribiendo

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{12} - a_{21} = 0 \\ a_{13} - a_{31} = 0 \\ a_{23} - a_{32} = 0 \end{array} \right.$$

o, equivalentemente:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{12} = a_{21} \\ a_{13} = a_{31} \\ a_{23} = a_{32} \end{array} \right. .$$

Entonces, si $A \in \mathcal{A}_2$ es

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{22} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{33} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, un conjunto de generadores de $\mathcal{A}_2$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y como este conjunto es l.i., la $\dim \mathcal{A}_2 = 6$.

Si nos piden ejemplos de elementos de $\mathcal{A}_2$, cualquier matriz de la base sirve.

Observemos que para decidir si una matriz es un elemento del conjunto $\mathcal{A}_2$, se debe verificar que los coeficientes de la misma que son "simétricos" respecto de la diagonal principal sean iguales.

Si una matriz está en $\mathcal{A}_2$ se llama *matriz simétrica*.

Más ejemplos de matrices simétricas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 \\ 8 & 0 & 3 \\ -5 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Observemos que en las matrices simétricas las filas son iguales a las columnas.

Matriz traspuesta

Dada una matriz A, la *matriz traspuesta* A^t es la que se obtiene transformando las filas de A en columnas.

Ejemplos:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $B^t \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $C^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Propiedades

1. Si $A \in R^{mxn}$ entonces $A^t \in R^{nxm}$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(A^t)^t = A$
4. Si $A^t = A$ si y sólo si A es simétrica.

Las propiedades 1, 2 y 3 son inmediatas.
Para verificar la propiedad 4, observemos primero que -por 1- debe cumplirse que

$m = n$, esto es, A debe ser en una matriz cuadrada. Y que sus filas sean iguales a sus columnas es la condición de simetría.

Ejercicios

Calcular, cuando sea posible:

1. $A^t + B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $A^t + B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $A^t + A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

4. $A^t + A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Soluciones

1. Como $A \in R^{2x3}$ entonces $A^t \in R^{3x2}$. Esto significa que A^t tiene 3 filas y 2 columnas. Entonces *no* se puede sumar con B, que tiene 2 filas y 3 columnas.

2. Es $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Entonces $A^t + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 4 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$.

3. Si A es un *vector fila*, entonces A^t es un *vector columna*: no se pueden sumar.

4. Ahora: $A^t + A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

Producto de matrices

Primero veamos cómo se define el *producto de un vector fila* $A \in R^{1xn}$ *por un vector columna* $B \in R^{nx1}$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n bn.$$

Ejemplos

1. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.2 + 5.3 + 0.4 + (-1).1 = 16$

2. $\begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 53.$

En general, para *multiplicar* $A \in R^{mxn}$ *por* $B \in R^{nxr}$ se debe multiplicar cada fila de A por cada columna de B. El resultado será una matriz $C = (c_{ij}) \in R^{mxr}$ donde

$$c_{ij} = A_i B^j:$$

el elemento c_{ij} es el resultado del producto -coeficiente a coeficiente- de la fila i de A por columna j de B.

Ejemplo

Ubicamos a las matrices de la siguiente manera:

	B
A	AB

Para calcular el lugar c_{ij} del producto, utilizamos la fila i de A y la columna j de B:

	B^j $\downarrow$
$A_i \longrightarrow$	c_{ij}

En este caso:

	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$

pues:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 9,\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 12,\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 15$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 19,\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 26,\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 33$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 29,\ \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 40,\ \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 51.$$

Propiedades

1. El producto de matrices *no* es conmutativo. Mas aún: puede ser que AB esté definido, mientras que BA no.
Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 20 \end{pmatrix}$$

pero

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

no se puede hacer pues no coinciden la cantidad de columnas de A con la cantidad de filas de B.
Aún estando definidos ambos productos, pueden no coincidir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}$$

pero

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}.$$

2. El producto de matrices es asociativo: $(AB)C = A(BC)$.

3. Observemos que si $A, B \in R^{nxn}$ entonces $AB \in R^{nxn}$. Y, para toda $A \in R^{nxn}$,

$AI_n = A = I_nA$.
Esto significa que I_n es elemento neutro para el producto.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. $(AB)^t = B^tA^t$.

Ejemplo:

$$\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$$

y:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^t\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si tiene paciencia, verifique que el lugar coeficiente $_{21}$ de $(AB)^t$ es el mismo que el coeficiente $_{21}$ B^tA^t.
(El coeficiente $_{21}$ de $(AB)^t$ es $_{12}$ de AB, esto es, fila 1 de A por columna 2 de B, y el coeficiente $_{21}$ de B^tA^t es la fila 2 de B^t por la columna 1 de A^t, o, lo que es lo mismo, la columna 2 de B por la fila 1 de A.)

Ejemplo

Escribir el sistema

$$S : \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

como producto de matrices y decidir si $(2,2,-2),(0,0,0)$ y $(0,-2,1)$ son soluciones de S.

Observemos que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a S.

Escribamos $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, entonces el sistema se puede abreviar

$$AX = B,$$

ya que

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_3 \\ -x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

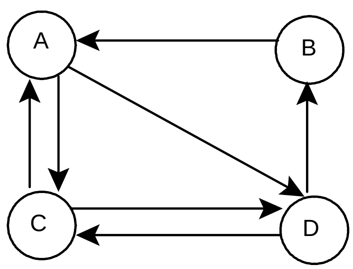
significa que

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}.$$

Aplicaciones

1. En las primeras 10 fechas del campeonato de fútbol, los equipos que representan a CG obtuvieron los siguientes resultados: el equipo A ganó 4 partidos, empató 4 y perdió 2; el equipo B ganó 3, empató 2 y perdió 5; el equipo C ganó 2, empató 3 y perdió 5; el equipo D ganó 7 y perdió 3. Cada partido ganado da 3 puntos, cada partido empatado da 1 punto y cada partido perdido da 0 puntos.
Escribir la información en forma de matriz y utilizar el producto de matrices para obtener el puntaje de cada uno de los equipos A, B, C y D.
Modificar el esquema suponiendo que cada partido ganado da 1 punto, cada partido empatado da 0 puntos y cada partido perdido da -1 punto.

2. Consideremos el siguiente esquema de vuelos directos entre las ciudades A, B y C:



Construir una matriz A que represente esta situación. ¿Qué significa A^2?

Soluciones

1. Armemos una matriz que nos informe, para cada equipo, cuántos partidos ganó, cuántos empató y cuántos perdió:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} g & e & p \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Escribimos en un vector columna los puntajes que se asignan a cada situación:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 11 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix}$$

obtenemos que A tiene 16 puntos, B tiene 11, C tiene 9 y D 21.

Si se cambian las reglas y el vector puntaje es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ entonces los puntos de cada equipo se consiguen multiplicando $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$: por ejemplo, B tiene -2 puntos!

2. Armamos una matriz M poniendo un 1 en el lugar ij si hay un vuelo de la ciudad que está en la fila i que vaya a la ciudad que está en la columna j, y con un 0 si no lo hay:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Calculemos M^2 y veamos qué significan los coeficientes de esta matriz.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, el coeficiente de la matriz producto que ocupa la fila 4, columna 1, es el producto de la fila 4 de la primera matriz por la columna 1 de la segunda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

Observemos que se "acumulan puntos" cuando se encuentran dos coeficientes no nulos. Por ejemplo, como hay un vuelo de D a B y hay un vuelo de B a A, habrá un vuelo de D a A -con una escala, pues pasamos por B.
La matriz M^2 nos dice si hay vuelos con una escala de la ciudad que está en la fila i a la ciudad que está en la columna j.
Si calculamos M^3 , cada coeficiente nos dice si hay vuelos con dos escalas de la ciudad que está en la fila i a la ciudad que está en la columna j.

Matriz inversa

Dada una matriz $A \in R^{nxn}$, la matriz A^{-1} es la *matriz inversa* si verifica: $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.
Observemos que si B y C verifican que $AB = BA = I_n$, y $AC = CA = I_n$ entonces $B = C$:

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C.$$

Esto nos permite hablar de *la* matriz inversa, pues si B y C son dos matrices inversas de A, deben ser iguales.

Ejemplo

Hallar la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Buscamos una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que verifique:

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 8a + 5c & 8b + 5d \\ 3a + 2c & 3b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando coeficiente a coeficiente, obtenemos:

$$\begin{cases} 8a + 5c = 1 \\ 8b + 5d = 0 \\ 3a + 2c = 0 \\ 3b + 2d = 1 \end{cases}.$$

Observemos que resolver este sistema equivale a resolver

$$S_1\begin{cases} 8a+5c=1 \\ 3a+2c=0 \end{cases} \quad , \quad S_2\begin{cases} 8b+5d=0 \\ 3b+2d=1 \end{cases}.$$

Ambos sistemas tienen la misma matriz asociada, $\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Podemos resolverlos simultáneamente triangulando la matriz $\left(\begin{array}{cc|c|c} 8 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 8 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 8 \end{array}\right).$$

Los sistemas S_1 y S_2 son equivalentes entonces a

$$S_1\begin{cases} a=2 \\ c=-3 \end{cases} \quad S_2\begin{cases} b=-5 \\ d=8 \end{cases},$$

de donde la matriz buscada $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es igual a $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$.

Observemos cómo han sido nuestras cuentas
Partimos de

$$(A \vdots I_n),$$

luego triangulamos hasta llegar a

$$(I_n \vdots A^{-1}).$$

De ahora en más sólo haremos las cuentas, pues el planteo siempre es el mismo.

Ejercicios

1. Calcular las matrices inversas de:

a. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b. $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Resolver el sistema $S:\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2y+z=2 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$ expresando la solución en términos de la matriz inversa a la matriz asociada al sistema.

Soluciones

1. **a**. Planteamos $\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$ y triangulamos:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{array}\right)$$

Entonces, $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$.

b. Hacemos lo mismo que en el caso anterior: triangulamos a partir de $(B \vdots I)$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{4} & 1 \end{array}\right).$$

Pero entonces, el sistema correspondiente a las incógnitas de la primera columna es incompatible, pues la segunda ecuación es $0a+0c=-\frac{2}{4}$.

Esto nos dice que $\boxed{\text{la matriz } B \text{ no tiene inversa}}$, pues, si intentamos hallarla, obtenemos un sistema incompatible.

En general, si aparece una fila de ceros en la matriz que ocupa el lugar en el cual debería quedar la matriz inversa que estamos buscando, el sistema será incompatible y la matriz dada *no* será inversible.

2. Queremos resolver $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2y+z=2 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$. Lo escribimos matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pongamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Nuestro sistema es entonces:

$$AX = B,$$

si A fuera inversible podríamos multiplicar a ambos miembros por A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

de donde

$$X = A^{-1}B.$$

Nos fijamos entonces si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es inversible: :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Entonces,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

y la solución de nuestro sistema (verificar esto) es

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Determinantes

Observemos que cuando quisimos resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

planteamos el cálculo de la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ sin saber si existía o no.

Es evidente que, si el sistema dado inicialmente fuera incompatible, las cuentas para buscar A^{-1} serían inútiles.
En el caso que el sistema inicial fuera compatible, tenemos expresada la (única) solución del sistema en términos de A^{-1}.

Por ejemplo, si $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, la solución del sistema es

$$X = A^{-1}B.$$

Lo que veremos ahora es un cálculo que permite saber si una matriz cuadrada es inversible *sin tener que calcular la inversa*.

Determinantes para matrices de R^{2x2}

Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

se define el *determinante* de A:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Observemos que *el determinante de una matriz es un número*.
Lo notamos $\det(A)$ o $|A|$.

Ejemplos

Calculemos los determinantes de las matrices A y B dadas arriba:

1. Si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\det(A) = 2 * 3 - 1 * (-1) = 7.$$

2. Si

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\det(B) = 4 * 1 - 2 * 2 = 0.$$

Determinantes para matrices de R^{3x3}

Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

se define

$$\det(A) = a_{11} * \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} * \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Ejemplo

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$, entonces

$$\det(A) = 1 * \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} - 2 * \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} + 3 * \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1 * (5 * 9 - 6 * 2) - 2 * (4 * 9 - 6 * (-1)) + 3 * (4 * 2 - 5 * (-1)) = -12.$$

Hemos definido el determinante de una matriz *desarrollando por la primera columna*. Pero ésta no es la única manera posible de hacerlo. *Se puede desarrollar por cualquier fila o columna*.

Para poder explicar cómo, daremos algunas definiciones.

Observemos que en el desarrollo del determinante de una matriz de 3x3, figura el cálculo de 3 determinantes de matrices de 2x2. Las submatrices a las cuales les calculamos estos determinantes tienen un nombre.

La *submatriz* que se obtiene a partir de A eliminando la fila i y la columna j se llama *ij-menor de* A, y se nota M_{ij}.

Ejemplos:

1. Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

entonces:

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix},\quad M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix},\quad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix},\quad M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix},\quad M_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

Hemos definido

$$\det(a)=\det(A)=a_{11}*\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}*\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}*\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix},$$

esto es:

$$\det(A)=a_{11}*|M_{11}|-a_{12}*|M_{12}|+a_{13}*|M_{13}|$$

(desarrollo por la la primera fila).
Lamaremos *ij-cofactor de A al número*:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

La diferencia entre el menor y el cofactor es, eventualmente, el signo. Coinciden en el signo si $i+j$ es par ($(-1)^{i+j}=1$), tienen signo opuesto si $i+j$ es impar ($(-1)^{i+j}=-1$).

Entonces:

$$\det(A)=a_{11}*A_{11}+a_{12}*A_{12}+a_{13}*A_{13}.$$

Se puede probar que también:

$$\det(A)=a_{21}*A_{21}+a_{22}*A_{22}+a_{13}*A_{13},$$

(desarrollo por la segunda fila), y

$$\det(A)=a_{31}*A_{31}+a_{32}*A_{32}+a_{33}*A_{33}$$

(desarrollo por la tercera fila).
También se puede desarrollar por columnas. Por ejemplo, el desarrollo del determinante por la primera columna es:

$$\det(A)=a_{11}*A_{11}+a_{21}*A_{21}+a_{31}*A_{31}.$$

Como ejercicio, escribir el desarrollo del determinatne de A por segunda y por tercera columna.

2. Calcular $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ -1 & 2 & 9\end{vmatrix}$ desarrollando por segunda columna.

Es:

$$\det(A)=(-1)^{1+2}*2*\begin{vmatrix} 4 & 6\\ -1 & 9\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}*5*\begin{vmatrix} 1 & 3\\ -1 & 9\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}*2*\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=$$

$$-2*(36+6)+5*(9+3)-2*(6-12)\ =\ -12.$$

Determinantes para matrices de R^{nxn}

Así como para calcular el determinante de una matriz de 3x3 se usan determinantes de matrices de $2x2$, para calcular el determinante de una matriz de nxn se usan determinantes de matrices de $(n-1)x(n-1)$.

Para el cálculo, se podrá desarrollar por cualquier fila o cualquier columna.

Se define *ij-menor* de A y $ij-cofactor$ de A, igual que antes.

Es

$$\det(A)\ =\ a_{i1}*A_{i1}+a_{i2}*A_{i2}+\ldots+a_{in}*A_{in}$$

(desarrollo por la fila i) y también

$$\det(A)\ =\ a_{1j}*A_{1j}+a_{2j}*A_{2j}+\ldots+a_{nj}*A_{nj}$$

(desarrollo por la columna j).

Ejemplos

1. Calcular $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ desarrollando por la segunda columna y por la tercera fila.

2. Calcular $\det(A)$ para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Calcular $\det(A)$ para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Soluciones

1. Vamos a poner $*$ para indicar el producto entre números reales. Primero desarrollamos por la segunda columna.

$$\det(A) = -2 * \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 1 * \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} - 3 * \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 4 * \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 24.$$

Ahora desarrollamos por la tercera fila:

$$\det(A) = 0 * \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} - 3 * \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 0 * \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} - 0 * \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 24.$$

Obviamente, conviene, para facilitar el cálculo, desarrollar por la fila o la columna que tenga más ceros.

2. Desarrollando por la primera columna, el determinante de esta matriz es

$$1 * \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0 = 1 * 2 * \begin{vmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 * 2 * 3 * \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 * 2 * 3 * 4 * 5.$$

Entonces, $\boxed{\det(A) = 120}$.

Si calculamos el $\det(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ desarrollando por la primera columna, también obtenemos que es igual al producto de los coeficientes que están en la diagonal.

En general, *una matriz es triangular* si tiene todos los coeficientes que están por debajo de la diagonal (o todos los que están por arriba) iguales a cero. En este caso, su determinante es el producto de los coeficientes de la diagonal.

En particular, $\det(I) = 1$.

3. Desarrollando por primera fila, obtenemos que:

$$\det(A) = 1 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 * \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Tenemos entonces que calcular el determinante para dos matrices de $4x4$.

a. Para calcular $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$, desarrollamos por tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -4 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$-4 * \left(1 * \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 1 * \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 1 * \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \right) =$$

$$-4 * ((1) - 1 * (-2) - 2) = -4.$$

b. Para calcular $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ podemos desarrollar por la primera o la tercera fila. Desarrollemos por la primera.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 * \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 * 4 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{\text{por} \\ \text{2da} \\ \text{fila}}} 12 * (-2) = -24.$$

Entonces, $\boxed{\det(A) = 1 * (-4) - 2 * (-24) = 44}$.

Propiedades de los determinantes.

1. Si $A, \quad B \in R^{nxn}$ entonces $\det(A.B) = \det(A) * \det(B)$.
2. $A \in R^{nxn}$ es inversible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.
3. $A \in R^{nxn}$ es inversible, entonces $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Observemos que la propiedad 3. es inmediata a partir de las anteriores: como

$$AA^{-1} = I,$$

entonces

$$\det(AA^{-1}) = 1.$$

Pero entonces

$$\det(A)\det(A^{-1}) = 1,$$

de donde

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Ejercicios

1. Determinar cuáles de las siguientes matrices son inversibles:

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

b. $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ calcular $\det(A.B)$.

3. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ -k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determinar k para que $\det(A.B) = 5$.

4. Para las mismas matrices de 3., determinar los valores de k para los cuales AB no es inversible.

5. Encontrar todos los $x \in R$ para los cuales $A = \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1+x \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ es inversible.

6. Encontrar todos los $x \in R$ para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ x & 5 & 3 \\ 12 & 7 & x \end{pmatrix}$ no admite inversa.

7. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular $\det(A.B^{-1})$.

Soluciones

1. Como no necesitamos hallar la matriz inversa sino sólo saber si existe, basta con calcular los determinantes.

a. Como A es una matriz triangular, su determinante es el producto de los coeficientes de la diagonal:

$$\det(A) = 1 * 2 * 3 \neq 0$$

Concluimos que $\boxed{A \text{ es inversible}}$.

b. Desarrollamos por la segunda fila:

$$\det(B) = 1 * \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Para calcular el determinante que falta, volvemos a desarrollar por la segunda fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -5 * \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5 * (6 - 6) = 0.$$

Entonces, $\boxed{B \text{ no es inversible}}$.

2. Aplicando la propiedad 1: $\det(A.B) = \det(A)\det(B)$, en lugar de hacer el producto calculamos cada uno de los determinantes $\det(A)$ y $\det(B)$.
Como A es una matriz triangular,

$$\det(A) = 1 * (-2) * 3 = -6.$$

Calculamos $\det(B)$ desarrollando por la fila 1:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3 * \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1.$$

Entonces, $\boxed{\det(A.B) = (-6) * (-1) = 6}$.

3. Otra vez usamos que $\det(A.B) = \det(A)\det(B)$.
Para calcular $\det(A)$ desarrollamos por la primera fila:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3.$$

Para calcular $\det(B)$ desarrollamos por segunda columna:

$$\det(B) = -\begin{vmatrix} -k & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = k.$$

Entonces $\det(A.B) = \det(A)\det(B) = (-3) * k = 5$ de donde $k = -\frac{5}{3}$.

4. Para que AB *no* sea inversible, debe cumplirse que

$$\det(AB) = 0.$$

Entonces:

$$\det(A)\det(B) = 0.$$

Luego

$$\det(A) = 0 \text{ ó } \det(B) = 0.$$

Como $\det(A) \neq 0$ (lo calculamos en el ejercicio anterior), se verifica que

$$\det(B) = 0.$$

Pero como

$$\det(B) = k$$

resulta que $\boxed{AB \text{ no es inversible si y sólo si } k = 0}$.

5. Sabemos ahora que para saber si una matriz es inversible no hace falta tratar de calcular la inversa, sino simplemente calcular el determinante y ver si es distinto de 0.
Calculamos entonces $\det(A)$, desarrollando por la primera fila:

$$\det(A) = x * \begin{vmatrix} 0 & 1+x \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3 * \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = x * (1+x) + 3 * (-2) = x^2 + x - 6.$$

Buscamos entonces los $x \in R$ para los cuales $x^2 + x - 6 \neq 0$.
Nos sirven todos los números reales excepto las raíces de la cuadrática $x^2 + x - 6$.
Repasemos entonces cómo se hallan las raíces de $ax^2 + bx + c$.
Si $b^2 - 4ac > 0$ entonces hay raíces, y las notamos x_1 y x_2.
En este caso,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ y } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Para abreviar se suele escribir

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ahora: $a = 1, b = 1$ y $c = -6$. Entonces:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-6)}}{2},$$

de donde

$$x_1 = -3, \; x_2 = 2.$$

Entonces, $\boxed{\text{la matriz } A \text{ es inversible para todo } x \neq -3 \text{ y } x \neq 2}$.

6. Buscamos los $x \in R$ para los cuales $\det(A) = 0$.
Calculamos

$$\det(A) = -2 * \begin{vmatrix} x & 3 \\ 12 & x \end{vmatrix} = -2 * (x^2 - 36).$$

Entonces

$$-2 * (x^2 - 36) = 0.$$

Pero como un producto es 0 sólo si alguno de los factores lo es, basta poner que $x^2 - 36 = 0$, y esto es lo mismo que $x^2 = 36$.

Entonces, $\boxed{\text{los valores de } x \text{ que hacen que } A \text{ no sea inversible son } x = 6 \text{ y } x = -6}$.

(Observemos que no hemos aplicado la fórmula de las raíces para resolver esta ecuación cuadrática, porque en este caso es más rápido y sencillo despejar directamente la variable. Conviene usar la fórmula sólo en el caso en que todos los coeficientes de la ecuacion -a,b y c -, sean distintos de cero.)

7. Para calcular $\det(A.B^{-1})$ aplicamos las propiedades acerca del determinante del producto y el determinante de la inversa:
$\det(A.B^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = \det(A).\frac{1}{\det(B)}$.
(No estaría mal calcular la inversa de B, luego hacer AB^{-1} y a esta última matriz calcularle el determinante, pero sería más laborioso).
Para calcular $\det(A)$ desarrollamos por la segunda fila

$$\det(A) = 6 * \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 * (2+4) = 36.$$

Ahora, calculamos $\det(B)$ desarrollando por la tercera fila:

$$\det(B) = 4 * \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 * (-3) = -12.$$

Entonces, $\boxed{\det(A.B^{-1}) = \frac{\det(A)}{\det(B)} = -\frac{36}{12} = -3}$.

Aplicación al análisis de sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

Propiedad

Sean $A \in R^{nxn}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$. Entonces, las siguientes proposiciones

1. El sistema $S : AX = B$ tiene solución única.

2. La matriz A es inversible.

3. $\det(A) \neq 0$.

son equivalentes.

Observación

Ya habíamos visto que $\boxed{\text{si } A \text{ es inversible}}$ entonces el sistema $AX = B$ es compatible determinado pues

$$X = A^{-1}B.$$

Si la matriz A no es inversible, el sistema S puede ser indeterminado o incompatible. Para ver en qué caso estamos, habrá que tener en cuenta B.

Ejercicios

1. Hallar todos los valores de $k \in R$ para los cuales el sistema

$$S:\left\{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}\right.$$

es compatible.

2. Determinar todos los valores de $k \in R$ para los cuales el sistema

$$S:\left\{\begin{array}{c} x + ky - z = -1 \\ kx + 2y = 2 \\ -2x + (1-k)y + 4z = 1 \end{array}\right.$$

a. tiene solución única,

b. tiene infinitas soluciones,

c. es incompatible.

Soluciones

1. Primero veamos para qué valores de k el sistema es *compatible determinado*.
En este caso, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & k^2 \end{pmatrix}$$

debe ser inversible, o, equivalentemente, $\det(A) \neq 0$.
Como

$$\det(A) = k^2 - 9,$$

entonces

$$k^2 - 9 \neq 0,$$

de donde

$$k^2 \neq 9.$$

Entonces $\boxed{\text{el sistema es compatible determinado si } k \neq 3 \text{ y } k \neq -3}$.
Para ver cuándo es *compatible indeterminado*, nos fijamos qué pasa para $k = 3$ y $k = -3$.
Si $k = 3$, la matriz ampliada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \end{array}\right),$$

que es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix},$$

de donde, $\boxed{\text{para } k = 3 \text{ el sistema es compatible indeterminado}}$.

Si $k = -3$, la matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 3 & 9 & \vdots & -3 \end{pmatrix},$$

que es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & -6 \end{pmatrix},$$

de donde, $\boxed{\text{para } k = -3\text{, el sistema es incompatible}}$.

Resumiendo: $\boxed{\text{el sistema es compatible para todo } k \neq -3}$.

2. Para estudiar el sistema S, calculemos

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & 2 & 0 \\ -2 & 1-k & 4 \end{vmatrix} = -k * \begin{vmatrix} k & -1 \\ 1-k & 4 \end{vmatrix} + 2 * \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$-k * (4k + 1 - k) + 2 * (4 - 2) = -k * (3k + 1) + 4 = -3k^2 - k + 4.$$

Busquemos las raíces de $-3k^2 - k + 4$:

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-3)4}}{2(-3)} = \frac{1 \pm 7}{-6}.$$

Entonces

$$k_1 = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}, \quad k_2 = 1.$$

Las raíces son los valores que hacen que el determinante sea 0.
Luego, el sistema será compatible determinado para los valores que no son raíces:

$$\boxed{\text{el sistema es compatible determinado para todo } k \neq -\tfrac{4}{3} \text{ y } k \neq 1}$$

Para que la respuesta esté completa, debemos estudiar qué pasa si $k = -\frac{4}{3}$ o si $k = 1$.

Si $k = -\frac{4}{3}$, la matriz ampliada del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} & -1 & \vdots & -1 \\ -\frac{4}{3} & 2 & 0 & \vdots & 2 \\ -2 & \frac{7}{3} & 4 & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Triangulamos:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{4}{3} & -1\vdots & -1 \\ 0 & \frac{2}{9} & -\frac{4}{3}\vdots & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 2\vdots & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -\frac{4}{3} & -1\vdots & -1 \\ 0 & 1 & -6\vdots & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 2\vdots & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -9\vdots & 3 \\ 0 & 1 & -6\vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0\vdots & 0 \end{array}\right)$$

Resulta entonces que

$$\boxed{\text{para } k = -\tfrac{4}{3} \text{ el sistema es indeterminado}}$$

.

Para $k = 1$ la matriz ampliada del sistema es:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1\vdots & -1 \\ 1 & 2 & 0\vdots & 2 \\ -2 & 0 & 4\vdots & 1 \end{array}\right).$$

Triangulamos:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1\vdots & -1 \\ 1 & 2 & 0\vdots & 2 \\ -2 & 0 & 4\vdots & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1\vdots & -1 \\ 0 & 1 & 1\vdots & 3 \\ 0 & 2 & 2\vdots & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1\vdots & -1 \\ 0 & 1 & 1\vdots & 3 \\ 0 & 0 & 0\vdots & -7 \end{array}\right).$$

Concluimos que

$$\boxed{\text{para } k = 1 \text{ el sistema es incompatible}}$$

Matriz insumo-producto

Este apartado es un resumen del capítulo 8 del libro de Grossman: *Aplicaciones del álgebra lineal*.

El objetivo es estudiar el modelo propuesto por el economista estadounidense Leontief, desarrollado en 1936 y por el cual ganó el premio Nobel de economía en 1973, que estudia la relación que hay en una economía entre lo que se produce y lo que se demanda en cada industria.

Matriz de tecnología y Matriz de Leontieff.

Vector producción y Vector demanda.

Ejemplo

Supongamos para simplificar que nuestra economía tiene sólo dos industrias: Minería y Petróleo.

Para poder funcionar, cada industria necesita usar productos que ella misma produce y también que produce la otra.
Supongamos que la industria minera necesita, por cada peso que produce, $\$0.2$ de sí misma y $\$0.6$ de la de petróleo; y la industria petrolera necesita, por cada peso que produce $\$0.3$ de la industria minera y $\$0.4$ de sí misma. Hasta aquí hemos mencionado cuál es la *demanda interna*: esto es, lo que demandan de sí mismas las industrias para poder funcionar.

Además, habrá una *demanda externa*: cuánto se pide de afuera del sistema,por ejemplo de usuarios, empresas privadas, otros países, etc. Supongamos que la demanda externa sea, en millones, de $\$180$ para la industria minera y $\$90$ para la petrolera.

Lo que necesitamos saber es *cuánto es necesario producir para satisfacer exactamente los requerimientos de la demanda interna y los de la demanda externa.*

Llamemos x a cuánto debe ser (en millones de pesos) la producción de la industria minera para satisfacer la demanda externa y la interna,

y llamemos y a cuánto debe ser (en millones de pesos) la producción de la industria petrolera para satisfacer la demanda externa y la interna.

¿Cuál es la demanda interna para la minería? Si x es la producción (en millones) de la industria minera, $\$0.2x$ se gasta en producirlos, y para producir y (en millones) de petróleo se requerirán $\$0.3y$. La demanda interna para la minería es entonces (en millones de pesos) $0.2x + 0.3y$. Agregando la demanda externa, se debe producir

$$x = 180 + 0.2x + 0.3y.$$

Igualmente vemos que

$$y = 90 + 0.6x + 0.4y.$$

Debemos entonces resolver el sistema

$$S : \begin{cases} x = 180 + 0.2x + 0.3y \\ y = 90 + 0.6x + 0.4y \end{cases} .$$

Escribámoslo matricialmente. Para eso llamemos $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ al *vector producción*.

Entonces S se puede escribir:

$$S: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 90 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matriz

$$C = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

se llama *matriz de tecnología* (o *de insumo-producto*): es la matriz que nos permite calcular cuánto se debe producir para satisfacer la demanda interna.

El vector

$$D = \begin{pmatrix} 180 \\ 90 \end{pmatrix}$$

se llama *vector de demanda externa*. Su significado es evidente.

Observemos que el sistema S se puede reescribir

$$S: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

Equivalentemente:

$$S: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

Para simplificar esta expresión, saquemos factor común $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: entonces

$$S: \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

La matriz $I - C$ se llama *matriz de Leontief*. En este caso:

$$I - C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.3 \\ -0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$$

nuestro sistema es:

$$S:\begin{pmatrix} 0.8 & -0.3 \\ -0.6 & 0.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

En general, si C es la matriz de tecnología, X el vector producción y D el vector demanda, podemos escribir

$$S:\ (I-C)X = D.$$

En condiciones normales $(I-C)$ resulta inversible, de donde el sistema es compatible determinado y su solución es

$$X = (I-C)^{-1}D.$$

Preferimos ahora resolver $(I-C)X = D$ en lugar de resolver $X = (I-C)^{-1}D$ para no tener que buscar $(I-C)^{-1}$.
Triangulamos entonces

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{-.3}{10} & 180 \\ \frac{-6}{10} & \frac{6}{10} & 90 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1800 \\ -6 & 6 & 900 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -6 & 6 & 900 \\ 8 & -3 & 1800 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -150 \\ 8 & -3 & 1800 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -150 \\ 0 & 5 & 3000 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -150 \\ 0 & 1 & 600 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 450 \\ 0 & 1 & 600 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, *para satifacer esa demanda la industria minera debe producir 450 millones de pesos y la industria petrolera debe producir 600 millones de pesos*.

Ejercicio

Una economía tiene dos rubros interdependientes A y B. La matriz de tecnología correspondiente es $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$.

Sabiendo que una producción de $\$2000$ para el rubro A satisface una demanda externa de $\$300$ para el rubro B, averiguar:

1. qué demanda externa satisface para el rubro A,

2. cuál fue la producción correspondiente al rubro B.

Solución

Tenemos como dato la matriz de tecnología C. Para repasar, interpretemos su significado: recordemos que la primera ecuación corresponde a lo que se debe producir en el primer rubro, que en este caso es el A.

La matriz C nos va a dar la información de cuál es la demanda interna para A:

el primer coeficiente, $a_{11} = 0.2$, es lo que A requiere de A: significa que se gastan $\$0.2$ del rubro A para producir un peso de A;
y el segundo coeficiente, $a_{12} = 0.5$, es lo que B requiere de A: significa que se gastan $\$0.5$ del rubro A para producir un peso de B.

Análogamente, para satisfacer las demandas internas de nuestra economía, la segunda ecuación corresponde a lo que se debe producir en el segundo rubro, en este caso B.
el primer coeficiente, $a_{21} = 0.4$, es lo que A requiere de B: significa que se gastan $\$0.4$ del rubro B para producir un peso de A;
y el segundo coeficiente, $a_{22} = 0.6$, es lo que B requiere de B: significa que se gastan $\$0.6$ del rubro B para producir un peso de B.

En general, sabemos que si X es el vector producción, D el vector demanda y $I - C$ la matriz de Leontieff, entonces

$$(I - C)X = D.$$

Nos dicen que:

$$(I - C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.5 \\ -0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

y

$$\text{si } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ y \end{pmatrix} \text{ entonces } D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Reemplazando obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 0.8 & -0.5 \\ -0.4 & 0.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2000 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Multiplicando:

$$\begin{pmatrix} -0.5y + 1600 \\ 0.4y - 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Esto se puede escribir como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: d_1 es la demanda externa que se satisface para A, e y es la producción correspondiente al rubro B. Reescribamos la igualdad anterior como:

$$\begin{cases} -0.5y + 1600 = d_1 \\ 0.4y - 800 = 300 \end{cases}.$$

De la segunda ecuación obtenemos $y = 2750$.
Reemplazando en la primera: $-0.5 * 2750 + 1600 = d_1$, de donde $d_1 = 225$.
Entonces: $\boxed{\text{la demanda externa que se satisface para el rubro } A \text{ es de } \$225}$, y

$\boxed{\text{la producción correspondiene en el rubro } B \text{ es de } \$2750}$.

Economía productiva

Sea C la matriz de insumo producto de una economía.

La pregunta que en general se quiere contestar es: dada una demanda externa, cuánto se debe producir para poder satisfacerla. En principio, podría existir una demada que no pueda ser satisfecha.

Ya que suponemos que la matriz de Leontieff es inversible, dado el vector D basta tomar

$$X = (I - C)^{-1}D.$$

Una economía es *productiva* si todos los coeficientes de la matriz $(I - C)^{-1}$ son positivos. En este caso, dado un vector demanda, siempre habrá un vector $X \geq 0$ que sea solución del sistema.

Condiciones suficientes

Para que una economía sea productiva, basta con que se cumpla **una** de las siguientes condiciones:

1. Que la suma de los coeficientes de cada fila de la matriz C sea menor que uno.

2. Que la suma de los coeficientes de cada columna de la matriz C sea menor que uno.

Esto significa que si *alguna de las dos* condiciones se cumple, la economía es productiva.

Tratemos de ver el significado económico de estas condiciones. Para eso, veamos el siguiente ejemplo.

Supongamos que tenemos una economía con dos industrias cuya matriz de tecnología es

$$C = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

y que producimos un peso para cada industria. Entonces, el vector producción es

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La demanda interna requerida para esta producción está dada por

$$\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, para producir un peso para cada industria, hay una demanda interna de $\$0.6$ para la primera y $\$0.8$ para la segunda. Nos están sobrando $\$0.4$ y $\$0.2$ respectivamente para satisfacer demandas externas.

Queda como ejercicio ver qué significado tiene la suma de cada columna.

Observación

La condición suficiente *no* se cumple si *hay tanto alguna fila como alguna columna* que verifiquen que la suma de sus coeficientes no es menor que uno. En este caso, *debe* *apelarse a la definición*: calcular la inversa de la matriz de Leontieff y ver si sus coeficientes son todos mayores o iguales a 0.

Ejercicios

Decidir si son productivas las economías cuyas matrices de tecnología son, respectivamente:

1. $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.8 & 0.1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$.

Soluciones

1. Sí, pues la suma de los coeficientes de las filas es menor que 1.
Se puede llegar a la misma conclusión trabajando con las columnas.

2. También es productiva, ya que la suma de los coeficientes de las filas es menor que 1.
No es necesario que se cumpla simultáneamente la condición sobre las columnas.

3. Es productiva, pues la suma de los coeficientes de las columnas es menor que 1.

4. Como no se cumple la condición suficiente, calculamos $(I-C)^{-1}$.
Planteamos:

$$(I-C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 \\ -0.2 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos entonces la matriz inversa de la matriz de Leontieff:

$$\begin{pmatrix} 0.6 & -0.4 & 1 & 0 \\ -0.2 & 0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 10 \\ 6 & -4 & 10 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 6 & -4 & 10 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 10 & 30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

Como todos los coeficientes de esta matriz son positivos,
$\boxed{\text{la economía es productiva}}$.

5. La condición suficiente no se cumple. En este caso, debemos ver si se cumple la condición requerida para $(I-C)^{-1}$.

$$(I-C)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -5.3846 & -6.1538 \\ -4.6154 & -3.8462 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $\boxed{\text{esta economía no es productiva}}$.

Mas ejercicios

1. Un chapista y un mecánico tienen sus talleres en la misma cuadra. Ambos reparan vehículos y usan los servicios de su vecino para completar sus propios trabajos. Cada peso de trabajo que realiza el chapista tiene un costo de $\$0,25$ de su propio servicio y $\$0,25$ del taller del mecánico. En cada peso que factura el mecánico hay $\$0,10$ de costo de chapista y $\$0,20$ de material del taller del propio mecánico. En promedio el chapista tiene encargos de trabajos por valor de $\$690$ y el mecánico por valor de $\$460$. ¿Cuánto debe producir cada uno por semana?

2. Una empresa que produce dos servicios: A y B, tiene matriz de tecnología $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 \\ 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$.
Si la empresa produce $\$500$ de A, ¿cuánto debe producir de B para satisfacer una demanda externa de $\$300$ de A?

Soluciones

1. Consideramos el chapista como la primera industria y el mecánico como la segunda.
Recordemos que la primera fila nos va a dar la información de cuál es la demanda interna para la primera industria, en este caso, para el chapista.
Transcribamos del problema: "Cada peso de trabajo que realiza el chapista tiene un costo de $\underline{\$0,25\text{ de su propio servicio}}$ y $\$0,25$ del taller del mecánico. En cada peso que factura el mecánico hay $\underline{\$0,10\text{ de costo de chapista}}$ y $\$0,20$ de material del taller del propio mecánico". Entonces, la demanda interna para el chapista es de $\$0,25$ yde $\$0,10$. Luego, en la primera fila de la matriz deben ponerse los coeficientes: $\begin{matrix} 0,25 & 0,10 \end{matrix}$. Análogamente, considerando la demanda interna para el mecánico, la segunda fila debe ser: $\begin{matrix} 0,25 & 0,20 \end{matrix}$. Entonces, la matriz de tecnología es:

$$C = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,10 \\ 0,25 & 0,20 \end{pmatrix}.$$

La demanda externa es $\begin{pmatrix} 690 \\ 460 \end{pmatrix}$. Como es habitual, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es el vector producción. Luego, reemplazando en la ecuación general $(I - C)X = D$, tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 0,75 & -0,10 \\ -0,25 & 0,80 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 690 \\ 460 \end{pmatrix}.$$

Haciendo cuentas, obtenemos que $x_1 = 1040$ y $x_2 = 900$. Esto significa que, $\boxed{\text{por semana, el chapista debe producir \$1490 y el mecánico \$900}}$.

2. Si $D = \begin{pmatrix} d_A \\ d_B \end{pmatrix}$ es el vector demanda y $X = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}$ es el vector producción, entonces .$X = \begin{pmatrix} 500 \\ x_B \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 300 \\ d_B \end{pmatrix}$. Reemplazando en la ecuación general $(I - C)X = D$, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & -0,4 \\ -0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 500 \\ x_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ d_B \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{cases} 0,8 * 500 - 0,4 * x_B = 300 \\ -0,1 * 500 + 0,8 * x_B = d_B \end{cases}$$

Despejando en la primera ecuación, obtenemos $x_B = 250$. Reemplazando este valor en la segunda ecuación, nos queda $d_B = 150$. De todos modos, sólo nos preguntaban por el valor de x_B. La respuesta es:

$\boxed{B \text{ debe producir \$250 para satisfacer una demanda externa de \$300 de } A}$.