PRÁCTICA 3

Espacios vectoriales

Vamos a dar ahora un sistema axiomático que tiene como ejemplos, entre otros, a los espacios R^2, R^3,..., R^n. La ventaja de dar un sistema axomático es que los resultados demostrados en los mismos valdrán a la vez en todos los ejemplos, esto es, a partir de los axiomas dados se demuestran teoremas, que serán válidos cada vez que se verifiquen los axiomas.

Definición

Un *espacio vectorial real* es un conjunto $\mathcal{V}$, a cuyos elementos llamaremos *vectores*, provisto de dos operaciones:

1. la suma $+$: a cada par de elementos (v,w) de $\mathcal{V}$ les asigna el elemento $v+w$ de $\mathcal{V}$,

2. el producto . por escalares: a cada número real λ y cada elemento v de $\mathcal{V}$ les asisgna el elemento $\lambda.v$ de $\mathcal{V}$. (En general pondremos λv en lugar de $\lambda.v$ -esto es, no escribimos el puntito ¨.¨.)
Imaginemos por ejemplo que nuestro conjunto $\mathcal{V}$ es R^2: sabemos sumarlos y multiplicarlos por un escalar. En R^2 resulta claro que $v+w = w+v$. Lo mismo si pensáramos que v y w son vectores de R^3, o de un R^n cualquiera. Otras propiedades básicas son comunes a estos espacios. Las que tomamos como axiomas son las siguientes -**se aconseja ir interpretando cada propiedad en R^2 y en R^3**:

a. Si v_1, v_2 y v_3 son vectores, entonces $(v_1+v_2)+v_3 = v_1+(v_2+v_3)$ -asociativa.

b. Si v_1 y v_2 son vectores, entonces $v_1+v_2 = v_2+v_1$ -conmutativa.

c. Existe un elemento *0* -que llamaremos *origen* -que es neutro para la suma: $0+v = v+0$, cualquiera sea el vector v. Esto es, hay un elemento neutro para la suma.

d. Para cada vector v, existe otro vector, -que notaremos $-v$ y llamaremos el *opuesto*- que verifica: $v+(-v) = 0$. Observación: pondremos “$v-v$” en lugar de “$v+(-v)$”.

e. Para todo vector v se verifica: $1.v = v$.

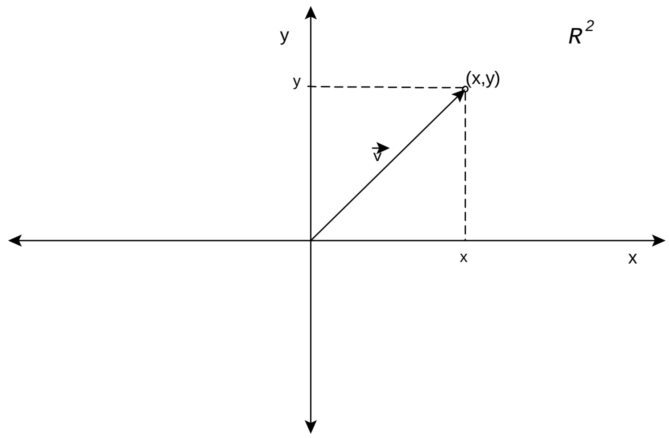
f. Si λ es un número real y v y w son vectores, entonces $\lambda(v+w) = \lambda v+\lambda w$.

g. Si λ y μ son números reales y v es un vector, entonces $(\lambda+\mu)v = \lambda v+\mu v$.

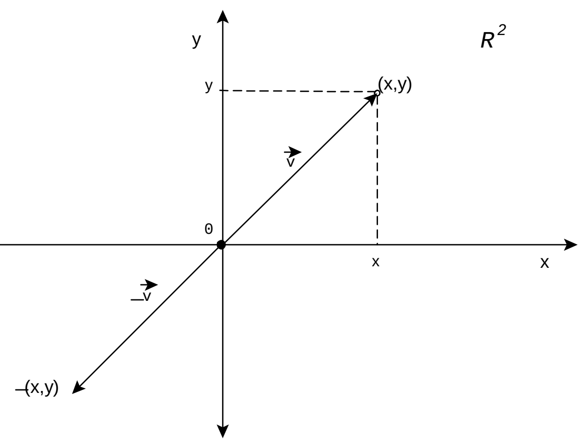
h. Si λ y μ son números reales y v es un vector, entonces $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$.

Ejemplos:

1. Al interpretar cada propiedad en R^2, se ve que R^2 con la suma y el producto por escalares que conocemos de la práctica 1 es un espacio vectorial. En este caso, los vectores son los puntos del plano. Es usual pensarlos también como flechas:



Si queremos representar la suma de vectores, podemos ver que es la misma que vimos en la práctica 1, y que el vector suma se obtiene como antes: aplicando la regla del paralelogramo. La multiplicación por escalares también coincide con lo hecho en la práctica 1. En particular, la suma de un vector v con su opuesto es el vector nulo:



En R^2 calculemos

a. $3(1,-1) = (3,-3)$,

b. $2(5,4) = (10,8)$,

c. $3(1,-1) + 2(5,4) = (3,-3) + (10,8) = (13,5)$.

2. También R^n, con la suma de vectores y el producto por escalares que hemos definido en la práctica 1, es un ejemplo de espacio vectorial. Por ejemplo, en R^5: $2(1,2,4,0,-1) + (-2,1,0,5,1) = (0,5,8,5,-1)$.

Observación

El espacio vectorial que definimos es *real* porque los escalares son números reales. Como son los únicos a los que haremos referencia, diremos simplemente “espacio vectorial” en lugar de espacio “vectorial real”.

Combinaciones lineales

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial, y v_1, v_2, ...,v_r vectores.

Si w es un vector que se puede escribir como $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r$, decimos entonces que w se puede escribir como *combinación lineal* de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_r$.

Ejemplos

1. En el plano:

a. $(2,3)$ es una combinación lineal del vector $(4,6)$ ya que $(2,3) = \frac{1}{2}(4,6)$.
Obviamente también es $(4,6)$ una combinación lineal del vector $(2,3)$ ya que $(4,6) = 2(2,3)$.

b. $(2,3)$ es una combinación lineal de los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ ya que $(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$.

c. $(2,3)$ es una combinación lineal de los vectores $(1,0)$, $(0,1)$ y $(2,5)$ ya que $(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1) + 0(2,5)$.

d. $(2,3)$ no es una combinación lineal del vector $(1,0)$ ya que $(2,3) = \lambda(1,0)$ no se verifica para ningún valor de λ.

2. En el espacio:

a. Escribamos tres combinaciones lineales de los vectores $(1,1,2)$ y $(2,2,0)$: por ejemplo $3(1,1,2) + 4(2,2,0)$, $3(1,1,2) - (2,2,0)$, $0(1,1,2) + 0(2,2,0)$.

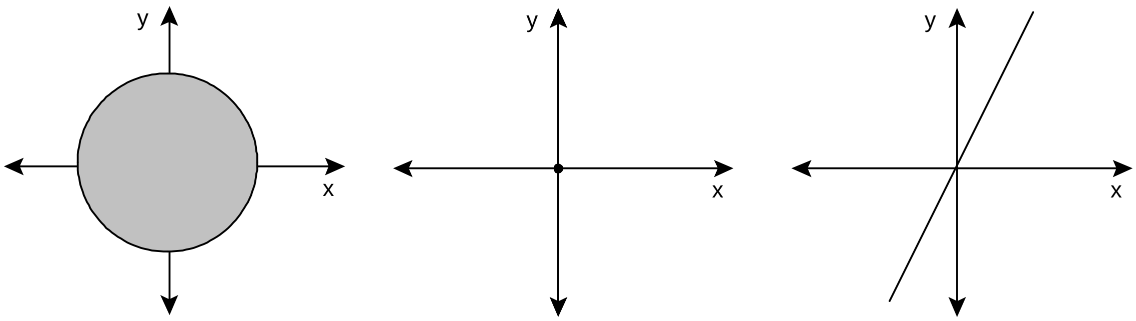
b. Veamos si el vector $(0,0,1)$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $(1,1,2)$ y $(2,2,0)$, esto es, si hay escalares α y β tales que $(0,0,1) = \alpha(1,1,2) + \beta(2,2,0) = (\alpha + 2\beta, \alpha + 2\beta, 2\alpha)$.
La igualdad entre dos vectores significa igualdad de cada una de sus coordenadas, esto es:

$$\begin{cases} 0 = \alpha + 2\beta \\ 0 = \alpha + 2\beta \\ 1 = 2\alpha \end{cases}.$$

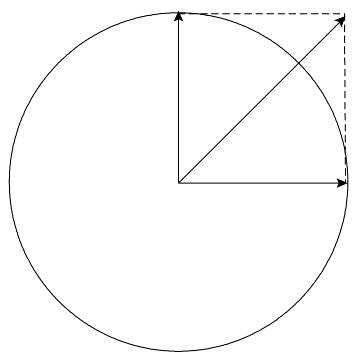
Resolviendo el sistema vemos que $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{-1}{4}$ es solución.
Podemos escribir entonces: $(0,0,1) = \frac{1}{2}(1,1,2) - \frac{1}{4}(2,2,0)$.

Subespacios

Sabemos que R^2 es un espacio vectorial. Son ejemplos de subconjuntos en R^2:



Sin embargo, no cualquier subconjunto será objeto de nuestro interés. Buscaremos *cuáles son aquéllos en los que, si nos restringimos a trabajar ahí, podemos seguir sumando y multiplicando por escalares, y que el resultado esté en el subconjunto con el que estamos trabajando* . Pensemos por ejemplo que nos quedamos con el círculo:



la suma de dos vectores que están dentro del círculo puede "caer afuera" del subconjunto que estamos considerando: en este caso, el círculo.

Claramente, si queremos poder seguir haciendo nuestras cuentas, y que tengan las mismas propiedades que en cualquier espacio vectorial, debemos pedir que nuestro subconjunto verifique que:

1. El elemento neutro de la $+$ está en el subconjunto. (O sea, el vector nulo está en el subespacio.)

2. Si dos vectores v y w están en el subconjunto, su suma $v + w$ también lo está.

3. Si v es un vector del subconjunto, entonces para cualquier escalar λ, λv está en el subconjunto.

Diremos que un subconjunto $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ que verifica las propiedades 1. 2 y 3 es un *subespacio* del espacio vectorial $\mathcal{V}$.

Esto es, *los subespacios son los conjuntos no vacíos tales que cualquier combinación lineal de elementos del conjunto es también un elemento del conjunto*.

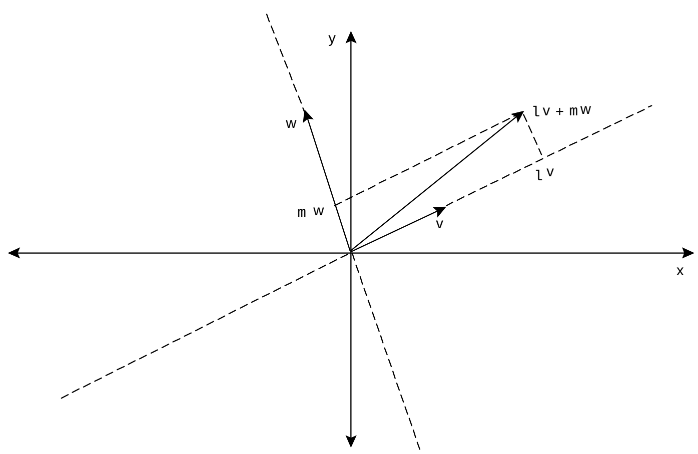
Ejemplos

Subespacios de R^2

1. Si $\mathcal{S}$ es un subespacio de R^2, por la propiedad 1 de subespacios, el vector nulo tiene que ser un elemento de $\mathcal{S}$. Tomemos $\mathcal{S} = \{0\}$. Las propiedades 2 y 3 se verifican trivialmente pues $0 + 0 = 0$ y $\lambda 0 = 0$. Esto significa que $\{0\}$ es un subespacio.

2. Sabemos que el vector nulo debe estar un todo subespacio. Veamos qué pasa si hay algo más. Supongamos entonces que $v \in \mathcal{S}$, y que $v \neq 0$. Por la propiedad 3, si v está en el subespacio, entonces λv también debe estarlo. Tomemos $\mathcal{S} = \{X \in R^2/X = \lambda v, \lambda \in R\}$, esto es, S es el conjunto de los múltiplos del vector v -para abreviar, $S : \lambda v$ o bien, $S = \{\lambda v\}$. Para que efectivamente sea un subespacio, debe cumplirse la propiedad 2. Pero si sumamos dos vectores que están en la recta que pasa por el origen y tiene dirección v, el vector suma también está en esa misma recta: $\lambda_1 v + \lambda_2 v = (\lambda_1 + \lambda_2)v$. Esto significa que $\{\lambda v\}$ es un subespacio.

3. Si $\mathcal{S}$ es un subespacio de R^2 que tiene un vector no nulo, también contiene la recta que pasa por el origen de dirección v. Supongamos ahora que en $\mathcal{S}$ hay otro vector w que no está en esa recta. Por la propiedad 3, μw también debe estar en el subespacio, y por la propiedad 2, $\lambda v + \mu w$ también está en $\mathcal{S}$. Veamos geométricamente que así podemos escribir cualquier vector del plano, de donde el subespacio $\mathcal{S}$ es todo el espacio.



Tenemos entonces que *todos los subespacios posibles de R^2 son*:

$$\begin{cases} \mathcal{S} = \{0\} & (1) \\ \mathcal{S} = \{\lambda v\} & (2) \\ \mathcal{S} = R^2 & (3) \end{cases} .$$

Los subespacios (1) y)(3) -nulo y todo- se llaman *triviales*. Los únicos subespacios no triviales del plano son entonces las rectas que pasan por el origen.

Subespacios de R^3

Haciendo una inspección parecida a la anterior se puede ver que los subespacios de R^3 son: *los triviales* -el nulo y todo el espacio-, *las rectas que pasan por el origen* y *los planos que pasan por el origen.* Esto es, *todos los subespacios posibles de* R^3 *son*:

$$\begin{cases} \mathcal{S} = \{0\} & (1) \\ \mathcal{S} = \{X = \lambda v\} & (2) \\ \mathcal{S} = \{X = \lambda v + \mu w\}, v \text{ y } w \text{ no colineales.} & (3) \\ \mathcal{S} = R^3 & (4) \end{cases}$$

Subespacios de R^n

Si bien no podemos graficar R^n, analíticamente se puede ver fácilmente -usando las propiedades que definen un subespacio- que todos los subespacios son:

$$\begin{cases} \mathcal{S} = \{0\} & (1) \\ \mathcal{S} = \{X = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r\}. & (2) \\ \mathcal{S} = R^n. & (3) \end{cases}$$

Definiciones

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial.

1. Si w es un vector que se puede escribir como $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r$ decimos que w *se puede escribir como combinación lineal* de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_r$.

2. Si $\mathcal{S} = \{X = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r\}$, decimos que los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_r$ *generan* $\mathcal{S}$. También decimos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es *un conjunto de generadores* de $\mathcal{S}$.
Una notación abreviada de este hecho es escribir: $\mathcal{S} = \langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$. Esto significa que $\mathcal{S}$ *es el subespacio formado por todas las combinaciones lineales de los vectores* $v_1, v_2, \ldots, v_r$.

Atención con la notación! No confundir $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ y $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$: en el primer caso nos estamos refiriendo al conjunto de r vectores $v_1, v_2, \ldots, v_r$, el segundo caso es un conjunto infinito: son todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_r$; notemos además que $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ no es un subespacio y $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$ sí lo es.

Ejemplos

1. En R^2

a. $\mathcal{S} = \langle (0,1) \rangle$. Si un vector (x,y) está en el subespacio, debe ser $(x,y) = \lambda_1(0,1)$. Es decir, $\mathcal{S}$ es el eje y.

b. $\mathcal{S} = \langle (0,1), (0,3) \rangle$. Si un vector (x,y) está en el subespacio, debe ser $(x,y) = \lambda_1(0,1) + \lambda_2(0,3)$. Pero $(0,3) = 3(0,1)$. Reemplazando, obtenemos: $(x,y) = \lambda_1(0,1) + 3\lambda_2(0,1)$ =(usando propiedades de las operaciones de un espacio vectorial) $(\lambda_1 + 3\lambda_2)(0,1) = \lambda(0,1)$ -abreviando $\lambda = \lambda_1 + 3\lambda_2$-. Entonces, ahora también $\mathcal{S}$ es el eje y.

c. $\mathcal{S} = \langle(1,2)\rangle$ es la recta que pasa por el origen y el punto $(1,2)$, ya que si (x,y) está en el subespacio, debe ser $(x,y) = \lambda_1(1,2)$.

2. En R^3

a. $\mathcal{S} = \langle(0,1,0)\rangle$. Si un vector (x,y,z) está en el subespacio, debe ser $(x,y,z) = \lambda_1(0,1,0)$. Es decir, $\mathcal{S}$ es el eje y.

b. $\mathcal{S} = \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle$. Si un vector (x,y,z) está en el subespacio, debe ser $(x,y,z) = \lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) = (\lambda_1,\lambda_2,0)$. En otros términos, la condición para estar en $\mathcal{S}$ es tener la tercera coordenada nula (las dos primeras pueden tomar cualquier valor y no están relacionadas entre sí). Entonces, un vector (x,y,z) está en el subespacio si y sólo si es solución del sistema $\{z = 0$.

3. En general, hemos visto qué forma tienen los subespacios de R^n: o son triviales, o son de la forma $\mathcal{S} = \{X = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r\}$.
En todos los casos, se pueden pensar como *soluciones de un sistema lineal homogéneo (en lugar de escribir primero el sistema y buscar la solución en forma paramétrica, hacemos ahora al revés: primero damos la solución en forma paramétrica y luego escribimos el sistema)*.
Entonces, todo subespacio de R^n se puede expresar como los $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ que satisfacen el sistema

$$\mathcal{S} = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

o dando su forma paramétrica $\boxed{\mathcal{S} = \{X = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r\}}$.

El subespacio $\mathcal{S} = \{0\}$ es la única solución de un sistema determinado de nxn. (¿Puede decir Ud. de qué sistema es solución el subespacio: $\mathcal{S} = R^3$?)

Ejemplos

1. En R^3, hallar generadores de los subespacios

a. $\mathcal{S}_1 : \{x_1 - x_2 = 0$

b. $\mathcal{S}_2 : \{x_1 + x_2 + x_3 = 0$

c. $\mathcal{S}_3 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

2. En R^3, estudiar el conjunto de soluciones de $\{x_1 - x_2 = 1$

Soluciones

1. En general, el procedimiento es el mismo que el que utilizábamos para escribir las soluciones de los sistemas en forma paramétrica (práctica 2).

a. Observemos que ya sabemos que, en el espacio, el conjunto de soluciones del sistema $\{x_1 - x_2 = 0$ es un plano. Para escribir la ecuación paramétrica del mismo despejamos $x_1 = x_2$. Obtenemos que X es un punto del plano si $X = (x_2, x_2, x_3) = x_2(1,1,0) + x_3(0,0,1)$. Esto nos dice que *los puntos de $\mathcal{S}_1$ son todas las combinaciones lineales de los vectores* $(1,1,0)$ y $(0,0,1)$. (De la ecuación paramétrica, obtenemos los generadores.) Entonces, $\boxed{\mathcal{S}_1 = \langle(1,1,0),(0,0,1)\rangle}$.

b. Ahora, $x_1 = -x_2 - x_3$. X es un punto de $\mathcal{S}_2$ si $X = (-x_2 - x_3, x_2, x_3) = x_2(-1,1,0) + x_3(-1,0,1)$. Entonces, $\boxed{\mathcal{S}_2 = \langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle}$.

c. De la segunda ecuación tenemos que $x_2 = -x_3$. Reemplazando en la primera, $x_1 = 2x_3$. X es un punto de $\mathcal{S}_3$ si $X = (2x_3, -x_3, x_3) = x_3(2,-1,1)$. Entonces, $\boxed{\mathcal{S}_3 = \langle(2,-1,1)\rangle}$.

2. Si escribimos las soluciones del sistema $\{x_1 - x_2 = 1$ en forma paramétrica, obtenemos que X es solución si $(x_1, x_2, x_3) = x_2(1,1,0) + x_3(0,0,1) + (1,0,0)$. Este conjunto no es un subespacio (por ejemplo, no se verifica la condición 1. de subespacios: $(0,0,0)$ no verifica la ecuación $x_1 - x_2 = 1$). Podemos pensarlo como un subespacio ¨trasladado¨: $\boxed{\mathcal{S}_1 + (1,0,0)}$.

Observemos que, en general, la solucion de un sistema lineal es un subespcio sólo en el caso en que el sistema sea homogéneo.

Más ejemplos

1. El conjunto $\{(3,2),(-1,1)\}$ genera R^2: debe averiguarse si **todo** vector del plano se puede poner como combinación lineal de los vectores $(3,2),(-1,1)$ o no. Consideremos entonces (x,y) en R^2. Buscamos λ y μ tales que $(x,y) = \lambda\,(3,2) + \mu(-1,1)$. Pero esto equivale a

$$\begin{cases} x = 3\lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \end{cases}.$$

Debemos entender que x e y son los "datos" y las incógnitas del sistema son los parámetros λ y μ.
Tenemos que resolver entonces este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
Sumando ambas ecuaciones, tenemos que $x + y = 5\lambda$, luego: $\boxed{\frac{x+y}{5} = \lambda}$.
Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones del sistema obtendremos μ. Por ejemplo, en la segunda: $y = 2(\frac{x+y}{5}) + \mu$. De aquí, $\boxed{\mu = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y}$.
Entonces, vemos que

$$(x,y) = \left(\frac{x+y}{5}\right)(3,2) + \left(-\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y\right)(-1,1).$$

Por ejemplo: si $x = 2$ e $y = 3$, tenemos que $(x,y) = (\frac{2+3}{5})\,(3,2) + (-\frac{2}{5}2 + \frac{3}{5}3)(-1,1) = (3,2) + (-1,1)$. Para cada valor que le demos a (x,y), hemos encontrado cómo escribirlo como combinación lineal de $(3,2)$ y $(-1,1)$.

El procedimiento para saber si un vector es combinación lineal de otros dados en general es equivalente a resolver un sistema lineal. Éste puede ser compatible o incompatible: en el primer caso, habremos encontrado cómo escribir el vector dado como combinación lineal de los otros, en el segundo no hay solución.

2. El conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ genera R^3, ya que todo X se puede escribir como $X = (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$.

3. Encontrar sistemas de generadores de
$\mathcal{S} = \{x \in R^3 : 3x_1 - 2x_2 = 0, \quad 4x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.
Observemos que el subespacio dado es el conjunto de soluciones del sistema:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

$\mathcal{S}$ es una recta que pasa por el origen. Encontrar generadores equivale a buscar la solución paramétrica del sistema, pues si la escribimos como λv, resulta que v es un generador de $\mathcal{S}$.
De la primera ecuación, tenemos que $\boxed{x_2 = \frac{3}{2}x_1}$.
Reemplazando en la segunda ecuación: $4x_1 + \frac{3}{2}x_1 - x_3 = 0$, de donde $\boxed{x_3 = \frac{11}{2}x_1}$
-no nos hizo falta triangular porque era claro que podíamos despejar x_2 y x_3 en función de x_1.
Entonces, un X está en $\mathcal{S}$ si $X = (x_1, \frac{3}{2}x_1, \frac{11}{2}x_1)$. Luego, $X = x(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{2})$, de donde $v = (1, \frac{3}{2}, \frac{11}{2})$ es un generador de $\mathcal{S}$. Podemos tomar otro generador: por ejemplo $w = (2,3,11)$, o $w' = (-2,-3,-11)$, etc. Observemos que es $\boxed{\mathcal{S} = \left\langle(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{2})\right\rangle}$ y también es $\boxed{\mathcal{S} = \langle(2,3,11)\rangle}$.

4. $\langle(2,4)\rangle = \langle(1,2)\rangle$: los múltiplos del $(2,4)$ y los de $(1,2)$ son los mismos: si $(x,y) = \alpha(2,4)$, entonces $(x,y) = 2\alpha(1,2)$, y si $(x,y) = \alpha(1,2)$, entonces $(x,y) = \frac{1}{2}\alpha(2,4)$.
En general: $(a,b) = \langle(c,d)\rangle$ si $(a,b) = \alpha(c,d)$.

5. De la misma manera, se puede ver, por ejemplo, que $\langle(2,4,6)\rangle = \langle(1,2,3)\rangle$, $\langle(1,0,3),(2,4,6)\rangle = \langle(1,0,3),(1,2,3)\rangle$, $\langle(1,0,3),(2,4,6)\rangle = \langle(3,0,9),(1,2,3)\rangle$, etc.

6. Decidir si $R^3 = \langle(1,-1,1);(0,1,1);(0,0,1);(1,2,1)\rangle$.

Sabemos que $\langle(1,-1,1);(0,1,1);(0,0,1);(1,2,1)\rangle$ es un subespacio, lo que queremos ver es si es todo el espacio. Para esto, debe verse si cualquier vector (x,y,z) puede escribirse como combinación lineal de los vectores dados. Estamos buscando, para cada (x,y,z), escalares λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, que verifiquen:

$$(x,y,z) = \lambda_1(1,-1,1) + \lambda_2(0,1,1) + \lambda_3(0,0,1) + \lambda_4(1,2,1).$$

Entonces:

$$(x,y,z) = (\lambda_1 + \lambda_4, -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4).$$

Igualando coordenada a coordenada, tenemos el sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_4 \\ y = -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_4 \\ z = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \end{cases}.$$

Para resolver, planteamos la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots x \\ -1 & 1 & 0 & 2 & \vdots y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots z \end{pmatrix}$$

Triangulamos, haciendo $F_2 \leftarrow F_2 + F_1$, $F_3 \leftarrow F_3 - F_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots x \\ 0 & 1 & 0 & 3 & \vdots x+y \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots -x+z \end{pmatrix}$$

Un paso más: hacemos $F_3 \leftarrow F_3 - F_2$ y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & \vdots x \\ 0 & 1 & 0 & 3 & \vdots x+y \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \vdots -2x-y+z \end{pmatrix}$$

La matriz ampliada que obtuvimos está asociada a un sistema *compatible*, para cualquier valor de x, y, z. De acá inferimos que R^3 sí está generado por los vectores dados, ya que para cualquier valor de (x,y,z), el sistema tendrá solución. .

Podemos observar además que el sistema es *indeterminado*: tiene infinitas soluciones.

En particular, podemos hacer $\lambda_4 = 0$, $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = x+y$ y $\lambda_3 = -2x - y + z$.

Entonces:

$$(x,y,z) = x(1,-1,1) + (x+y)(0,1,1) + (-2x-y+z)(0,0,1) + 0.(1,2,1).$$

Vemos que el vector $(1,2,1)$ "no se necesita" para generar el espacio, si ya tenemos en nuestro conjunto de generadores los tres anteriores. En particular, utilizando la cuenta anterior para $(x,y,z) = (1,2,1)$, como $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$, resulta

$(1,2,1) = 1(1,-1,1) + 3(0,1,1) - 3(0,0,1) + 0.(1,2,1)$.

Lo que debemos hacer ahora es especificar las condiciones que hacen que se pueda generar un subespacio sin vectores "de más".

Observemos que la última expresión la podemos escribir como

$0 = -(1,2,1) + 1(1,-1,1) + 3(0,1,1) - 3(0,0,1)$. Esto motiva la definición que daremos en el próximo párrafo.

Dependencia e independencia lineal

Dado un espacio vectorial $\mathcal{V}$ y un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ en $\mathcal{V}$, decimos que el conjunto es *linealmente dependiente* -o **l.d**.- si existen números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ no todos iguales a cero tales que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r = 0$.

En caso contrario, el conjunto es *linealmente independiente* -o **l.i**.

Ejemplos

1. Como $0 = -(1,2,1) + 1(1,-1,1) + 3(0,1,1) - 3(0,0,1)$, el conjunto $\{(1,2,1),(1,-1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ es ld. En este caso, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 3$ y $\alpha_4 = -3$.

2. El conjunto $\{(1,-4),(-2,8)\}$ es l.d. porque como $(-2,8) = -2(1,-4)$ resulta que $(-2,8) + 2(1,-4) = 0$. En este caso, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$.
Observemos que si $\mathcal{S} = \langle(1,-4)\rangle$, entonces $\mathcal{S} = \langle(1,-4),(-2,8)\rangle = \langle(-2,8)\rangle$. (Los vectores que son múltiplos de $(1,-4)$ *son los mismos* que los que se obtienen como combinación lineal de $(1,-4)$ y $(-2,8)$.)

3. El conjunto $\{(0,1,1),(1,0,1)\}$ es l.i.: si $\alpha_1(0,1,1) + \alpha_2(1,0,1) = (0,0,0)$ entonces:

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

La única combinación lineal que verifica $\alpha_1(0,1,1) + \alpha_2(1,0,1) = (0,0,0)$ es tomando $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$.
(Observemos que si por ejemplo $\alpha_1 \neq 0$, podríamos despejar $(0,1,1)$, siendo: $(0,1,1) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(1,0,1)$, los vectores serían colineales.)

4. El conjunto $\{(0,1,1),(1,0,1),(2,1,3)\}$ es l.d. pues el vector $(2,1,3)$ está en el plano generado por $\{(0,1,1),(1,0,1)\}$: $(2,1,3) = (0,1,1) + 2(1,0,1)$.

Regla práctica:

Una manera sencilla de ver que $\{(1,0,1),(0,1,1),(2,1,3)\}$ es l.d.es disponer los vectores dados como si fueran filas de una matriz. Recordemos que para operar entre filas de una matriz, se pueden multiplicar por un escalar, y sumarlas; todo como si fueran vectores. Esta similitud es aprovechada ahora para el cálculo. Veamos cómo funciona en el caso de querer ver si el conjunto dado arriba es l.d. o l.i.
Dispongamos las filas en una matriz, pero ahora en lugar de designarlas como F_i, ponemos v_i y vamos indicando al costado de la matriz las operaciones que vamos haciendo:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 - 2v_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 - 2v_1 - v_2 \end{array}$$

De la última fila, obtenemos que $-2v_1 - v_2 + v_3 = (0,0,0)$. El conjunto es l.d., siendo $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$. Observemos que: $v_3 = 2v_1 + v_2$, y que si $\mathcal{S} = \langle (1,0,1),(0,1,1),(2,1,3) \rangle$ entonces $\mathcal{S} = \langle (1,0,1),(0,1,1) \rangle$.

El conjunto $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ es l.i. pues la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ya está triangulada y ninguna fila es nula.

Ejemplos

Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son l.i.:

1. $\{(3,1,1);(1,0,1);(2,1,3)\}$.

2. $\{(0,0,1);(2,2,3);(1,1,1)\}$.

3. $\{(3,2,-1,0);(2,5,4,1);(2,2,2,2);(1,0,1,0)\}$.

Resolvemos.

1. Disponemos los vectores en una matriz y triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} v_2 \\ v_1 - 3v_2 \\ v_3 - 2v_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} v_2 \\ v_1 - 3v_2 \\ v_3 - 2v_2 - (v_1 - 3v_2) \end{array}.$$

Hemos terminado de triangular y ninguna fila es nula, $\boxed{\text{el conjunto dado es l.i.}}$.
Triangulando "de manera inversa " podríamos recuperar la matriz original a partir de la última: las combinaciones lineales de los vectores $(3,1,1);(1,0,1);(2,1,3)$ son las mismas que las combinaciones lineales de los vectores $(1,0,1),(0,1,-2),(0,0,3)$. Esto es:

$$\langle (3,1,1);(1,0,1);(2,1,3) \rangle = \langle (1,0,1),(0,1,-2),(0,0,3) \rangle.$$

En general, *si disponemos como filas de una matriz los vectores dados, operando entre las filas obtendremos otro conjunto de vectores que genera el mismo subespacio*.

2. Para acortar los pasos, pongamos al vector $(1,1,1)$ en la primera fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Triangulando, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por una cuestión de comodidad, no hemos escrito a qué vector corresponde cada fila. Igualmente podemos contestar: $\boxed{\text{el conjunto dado es l.d.}}$ pues la última fila es nula. Si "seguimos el rastro " de nuestras cuentas, podemos concluir que el vector $(0,0,1)$ es combinación lineal de los demás, luego $\mathcal{S} = \langle (1,1,1),(2,2,3),(0,0,1)\rangle = \langle (1,1,1),(2,2,3)\rangle$.
En realidad, pocas veces importa cómo se puede escribir el vector que ocupaba el lugar de la fila que se anula en función de los otros, por este motivo, en general no escribiremos los vectores v_i al costado de la matriz.

3. Triangulamos la matriz en cuyas filas están los vectores dados -como ejercicio, indicar cuáles son las operaciones que se van efectuando:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Luego, $\boxed{\text{el conjunto dado es l.i.}}$.

Bases

Sabemos que

$$\mathcal{S} = \langle (1,1,1),(2,2,3),(0,0,1)\rangle = \langle (1,1,1),(2,2,3)\rangle$$

puesto que

$$(0,0,1) = -2(1,1,1) + (2,2,3).$$

Con el conjunto de vectores $\{(1,1,1),(2,2,3)\}$ alcanza para generar $\mathcal{S}$, pero no con $\{(1,1,1)\}$ ni con $\{(2,2,3)\}$. El conjunto $\{(1,1,1),(2,2,3)\}$ es una *base* de $\mathcal{S}$.

En general, dado un espacio vectorial $\mathcal{V}$, un subespacio $\mathcal{S}$ de $\mathcal{V}$ y un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ en $\mathcal{V}$, decimos que el conjunto es *una base* de $\mathcal{S}$ si

1. $\mathcal{S} = \langle v_1, v_2, \ldots, v_r\rangle$ y

2. $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es l.i.

La idea es generar $\mathcal{S}$ de la manera más económica, y esto se consigue *tomando un* *conjunto de generadores que además sea l.i.*

Ejemplos:

1. En R^2: el conjunto $\{(1,0)(0,1)\}$ es una base de R^2: generan todo el plano, ya que cualquier (x,y) se puede escribir como combinación lineal de $(1,0)$ y $(0,1)$:

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

y claramente $\{(1,0),(0,1)\}$ es un conjunto l.i.

2. En R^3: $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es una base de R^3:

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

3. En R^n: $\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),(0,0,\ldots,1)\}$ es una base de R^n. Ésta se llama *base canónica*.

Propiedades

1. Sea $\mathcal{S}$ un subespacio de un espacio vectorial $\mathcal{V}$. Si $\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}$ y $\{w_1,w_2,\ldots,w_s\}$ son dos bases de $\mathcal{S}$, entonces $r = s$.
Esto quiere decir que *todas las bases de un mismo subespacio tienen la misma cantidad de vectores*. Este número se llama la *dimensión* del subespacio, y lo notaremos $dim(\mathcal{S})$.
En particular, $dim(R^2) = 2$, $dim(R^3) = 3$, ..., $dim(R^n) = n$. (Basta contar la cantidad de vectores que tienen las respectivas bases canónicas:)

Por definición, para verificar que un conjunto es base de un subespacio, sabemos que hay que verificar dos propiedades: la de generar y la de ser linealmente independiente. Sin embargo, si por algún motivo conocemos de antemano la dimensión de ese subespacio, basta con verificar sólo una de las dos. Esto es lo que dicen las propiedades 2. y 3:

2. Sea $\mathcal{S}$ un subespacio de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ de dimensión r. Si $\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}$ es l.i., entonces $\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}$ es una base de $\mathcal{S}$.

3. Sea $\mathcal{S}$ un subespacio de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ de dimensión r. Si $\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}$ es un conjunto de generadores de $\mathcal{S}$, entonces $\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}$ es una base de $\mathcal{S}$.
Es útil recordar estas propiedades al hacer los ejercicios. Esto es, *si conocemos la dimensión de un subespacio*, para ver que un conjunto es base del mismo bastará con ver que es l.i o conjunto de generadores.

Ejercicios

1. Decidir si los siguientes conjuntos son bases de R^2:

a. $\{(1,0)\}$

b. $\{(1,0),(-1,1),(1,1)\}$

c. $\{(1,0),(-1,1)\}$.

2. Hallar una base y la dimensión de los siguientes subespacios:

a. $\mathcal{S} = \{X \in R^3 \quad / \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$

b. $\mathcal{S} = \left\{ X \in R^4 \quad / \quad \left\{ \begin{array}{c} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$.

3. Hallar base y dimensión de $\mathcal{S} = \langle (1,0,2); (-5,1,1); (-3,1,5) \rangle$.

Soluciones

1. Sabemos que la dimensión de R^2 es 2, por lo tanto, todas las bases tienen que tener 2 vectores. Los conjuntos a. y b. están entonces descartados. Veamos qué pasa con $\{(1,0),(-1,1)\}$: es un conjunto l.i. porque $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
En particular, de acá vemos que $\langle (1,0),(-1,1) \rangle = \langle (1,0),(0,1) \rangle = R^2$. Entonces, además de ser l.i., generan todo el espacio.
Luego, $\boxed{\{(1,0),(-1,1)\} \text{ es una base de } R^2}$.

a. Sabemos encontrar un conjunto de generadores de $\mathcal{S}$, buscando la solución del sistema expresada en forma paramétrica. Para eso, despejamos $x_1 = x_2 - x_3$, de donde cada $X \in \mathcal{S}$ es de la forma
$X = (x_2 - x_3, x_2, x_3) = x_2(1,1,0) + x_3(-1,0,1)$.
De acá concluimos que $\{(1,1,0),(-1,0,1)\}$ es un conjunto de generadores.
Y como son l.i.: $\boxed{\{(1,1,0),(-1,0,1)\} \text{ es una base}}$.

b. De la misma manera que en el caso anterior, buscamos la solución paramétrica del sistema. Para esto, escribimos la matriz ampliada y triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Reconstruimos el sistema (*no confundir esta matriz con la que armamos con los vectores para ver l.i.*).

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Resolvemos: de la tercera ecuación obtenemos: $\boxed{x_3 = -x_4}$ y de la segunda: $\boxed{x_2 = -x_4}$.
Reemplazamos en la primera: $x_1 - (-x_4) + x_4 = 0$, entonces: $\boxed{x_1 = -2x_4}$.

La solución paramétrica es $X = (-2x_4, -x_4, -x_4, x_4) = x_4(-2,-1,-1,1)$.
Luego, $\boxed{\{(-2,-1,-1,1)\} \text{ es una base de } \mathcal{S}}$: es un conjunto de generadores y es l.i.

2. Tenemos como dato que $\{(1,0,2);(-5,1,1);(-3,1,5)\}$ es un conjunto de generadores. Son l.i.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $\langle(1,0,2);(-5,1,1);(-3,1,5)\rangle = \langle(1,0,2);(0,1,11)\rangle$ y como $\{(1,0,2);(0,1,11)\}$ es l.i., $\boxed{\{(1,0,2);(0,1,11)\} \text{ es una base de } \mathcal{S}, \text{ y } dim(\mathcal{S}) = 2}$.
Los conjuntos $\{(1,0,2);(-5,1,1)\}$, $\{(1,0,2);(-3,1,5)\}$,$\{(-5,1,1);(-3,1,5)\}$ son l.i. y sus elementos son vectores de $\mathcal{S}$. Además, $\{(1,0,2);(-5,1,1)\}$ genera $\mathcal{S}$, ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y como es l.i., $\{(1,0,2);(-5,1,1)\}$ es base de $\mathcal{S}$.
En general: cualquier subconjunto l.i. de $\mathcal{S}$ de 2 vectores será una base, pues generará el mismo subespacio.

Lo mismo que para cualquier subespacio: *si conocemos la dimensión, basta ver que un conjunto de vectores es l.i. para concluir que este conjunto es base.*

Ejercicios

1. Hallar dos bases distintas de $\mathcal{S} = \langle(1,-1,1,0);(0,1,2,1)\rangle$.

2. Dado $\mathcal{S} = \{X \in R^4 : x_1 - x_2 = 0 \quad , \quad x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$,

a. hallar, si es posible, una base de $\mathcal{S}$ que contenga el vector $v = (0,0,-1,1)$,

b. hallar una base de $\mathcal{S}$ que no contenga el vector $v = (0,0,-1,1)$,

c. hallar, si es posible, una base de $\mathcal{S}$ que contenga el vector $v = (0,1,1,-1)$.

3. Hallar los valores de a y b para que $\{(1,0,a);(3,b,1)\}$ sea una base de $\mathcal{S} = \{X \in R^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$.

4. En R^3, sea $\mathcal{S} = \langle(1,-3,2);(3,1,0);(1,7,k)\rangle$. Determinar los valores de $k \in R$ para los cuales el subespacio $\mathcal{S}$ tiene dimensión 2.

5. Sean $v_1 = (2,-1,-1,0)$, $v_2 = (1,0,0,0)$, $v_3 = (0,1,1,0)$, $v_1 = (2,2,2,2)$. Hallar una base de $\mathcal{S} = \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle$ que no contenga ni a v_1, ni a v_2, ni a l.i.v_3 ni a v_4.

6. Expresar, si es posible, $(4,-1,1)$ como combinación lineal de $(0,1,1)$, $(2,0,1)$

y $(2,1,2)$ de dos maneras distintas.

7. Decidir si existe algún valor $k \in R$ tal que $\{(k,k,1);(3,-k,-1)\}$ es base del subespacio $\mathcal{S} = \{X \in R^3/x_1 + 3x_3 = 0\}$. Justificar.

8. Sea $\mathcal{S} = \{X \in R^4/x_1 - x_3 + 2x_4 = 0\}$. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son base de $\mathcal{S}$:

a. $C_1 = \{(1,0,1,0);(2,0,0,-1);(0,1,0,0)\}$.

b. $C_2 = \{(0,0,2,1);(-1,0,1,1)\}$.

c. $C_3 = \{(1,1,1,0);(1,0,1,0);(2,1,2,0)\}$.

9. Determinar a para que el vector $(1,3,a,2)$ pertenezca al subespacio $\mathcal{S} = \langle(1,-1,1,-1),(2,2,0,1)\rangle$.

10. Determinar a para que el vector $(a,2a,3)$ pertenezca al subespacio $\mathcal{S} = \langle(1,1,-3),(0,-1,3\rangle$.

11. Dado $\mathcal{S} = \{x \in R^4 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ encontrar un vector v no nulo de $\mathcal{S}$ que pertenezca a $\mathcal{W} = \langle(1,1,-2,-2),(0,2,-1,-1)\rangle$.

12. Extender, si es posible, los siguientes conjuntos a una base del espacio vectorial que los contiene:

a. $\{(1,-2)\}$

b. $\{(1,1,0)\}$

c. $\{(1,1,0),(2,2,0)\}$

d. $\{(1,1,0),(2,2,3)\}$

Soluciones

1. $\{(1,-1,1,0);(0,1,2,1)\}$ es un conjunto de generadores de $\mathcal{S}$, como además -verificar- es un conjunto l.i., entonces $\boxed{\{(1,-1,1,0);(0,1,2,1)\} \text{ es una base de } \mathcal{S}}$.
Para buscar otra base, hay que encontrar dos vectores l.i. que sean combinación lineal de $v_1 = (1,-1,1,0)$ y $v_2 = (0,1,2,1)$.
Por ejemplo: $\{2v_1,-v_2\}$, $\{v_1+v_2, v_1-v_2\}$, etc. Entonces:
$\boxed{\text{los conjuntos: } \{(2,-2,2,0),(0,-1,-2,-1)\} \text{ y } \{(1,0,3,1);(1,-2,-1,-1)\} \text{ son bases de } \mathcal{S}}$.

2.

a. Hallemos primero una base cualquiera del subespacio dado para ver cuál es su dimensión.
Es $\mathcal{S} = \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$. Como el sistema está triangulado, podemos empezar a despejar variables. De la segunda ecuación obtenemos: $\boxed{x_4 = -x_2 - x_3}$.
De la primera, $\boxed{x_1 = x_2}$, de donde la solución paramétrica del sistema es: $X = (x_2,x_2,x_3,-x_2-x_3) = x_2(1,1,0,-1) + x_3(0,0,1,-1)$.

Entonces, $\{(1,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$ es un sistema de generadores, y como es un conjunto l.i. -verificar-, es una base. Pero el ejercicio pide que el vector $(0,0,-1,1)$ pertecezca a la base. No confundir, $\{(1,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$ es un conjunto de dos elementos, y $(0,0,-1,1)$ no es ninguno de ellos. Pero como $(0,0,-1,1) = -(0,0,1,-1)$, entonces $\langle(1,1,0,-1),(0,0,1,-1)\rangle = \langle(1,1,0,-1),(0,0,-1,1)\rangle$. Luego,

$\boxed{\{(1,1,0,-1),(0,0,-1,1)\} \text{ también es una base y contiene al vector } (0,0,-1,1)}$.

b. Recordemos que en particular una base es un sistema de generadores, por lo cual estamos buscando dos vectores v_1 y v_2 que verifiquen que todo vector del subespacio se pueda escribir: $X = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.
Sabemos que $X = \lambda_1(1,1,0,-1) + \lambda_2(0,0,-1,1)$, pero ahora **no** podemos usar el vector $(0,0,-1,1)$ para generar. Pero -por ejemplo- $X = \lambda_1(1,1,0,-1) + (-\lambda_2)(0,0,1,-1)$, de donde $\{(1,1,0.-1),(0,0,1,-1)\}$ es un conjunto de generadores y no contiene el vector $(0,0,-1,1)$.
Es inmediato ver que también es un conjunto l.i.. Entonces

$\boxed{\{(1,1,0,-1),(0,0,1,-1)\} \text{ también es una base y no contiene al vector } (0,0,-1,1)}$.

Observemos que podríamos haber tomado cualquier múltiplo no nulo del vector $(0,0,-1,1)$ en el lugar de $(0,0,1,-1)$, obteniendo el mismo resultado.

c. Todos los vectores que están en una base de un subespacio son en particular elementos de ese subespacio. Como el vector $(0,1,1,-1)$ no verifica la primera ecuación de $\mathcal{S} = \{X \in R^4 : x_1 - x_2 = 0 \quad , \quad x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ -ya que $0 - 1 \neq 0$- entonces $\boxed{\text{no hay ninguna base de } \mathcal{S} \text{ que contenga al vector } (0,1,1,-1)}$.

3. Observemos que $\mathcal{S}$ es un plano en R^3 -una ecuación lineal en el espacio-. Por esto, $\dim(\mathcal{S}) = 2$. Entonces, una base es un conjunto de dos vectores para los que se verifica que están en $\mathcal{S}$ y son l.i.
Para que los vectores dados estén en $\mathcal{S}$, deben verificar la ecuación de definición de $\mathcal{S}$, esto es: $\left\{\begin{array}{l} 1 - 2.0 + a = 0 \\ 3 - 2b + 1 = 0 \end{array}\right.$. De acá obtenemos que $\boxed{a = -1 \text{ y } b = 2}$.
Falta ver que $\{(1,0,-1);(3,2,1)\}$ es l.i., pero esto vale pues
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Es $\{(1,-3,2);(3,1,0);(1,7,k)\}$ un conjunto de generadores, si fuera l.i. la dimensión del subespacio sería 3. Como $\{(1,-3,2);(3,1,0)\}$ es l.i., podríamos ver que $(1,7,k)$ es combinación lineal de $(1,-3,2)$ y $(3,1,0)$.

Si no, directamente triangulamos $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix}$. Es

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 10 & -6 \\ 0 & 10 & k-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & k+4 \end{pmatrix}.$$

Luego, debe ser $\boxed{k = -4}$.

5. Primero hallamos una base de $\mathcal{S}$ para ver la dimensión. Para eso triangulamos la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la dimensión de $\mathcal{S}$ es 3 y el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathcal{S}$. Pero como no queremos que contenga ninguno de los vectores dados, tomamos por ejemplo $\{2v_1, 3v_2, -v_3\}$ como base de $\mathcal{S}$. Otra solución posible es $\boxed{\{(-2,1,1,0),(0,1,1,0),(0,0,0,2)\} \text{ es una base de S}}$, pues es un conjunto de generadores -ver la triangulación anterior- y además es un conjunto l.i. Obviamente, no contiene ninguno de los vectores dados.

6. Si triangulamos la matriz $\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{array}$ y llegamos a una matriz con última fila nula, tendremos escrito v_4 como combinación lineal de v_1, v_2 y v_3 (escribimos la columna de vectores $\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix}$ para, con las mismas cuentas, obtener la combinación lineal buscada). Es

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} \end{array} \sim \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_2 \\ v_1 \\ v_3 - v_2 \\ v_4 - 2v_2 \end{matrix} \end{array}$$

Con un paso más, vemos que $v_4 - 2v_2 + v_1 = 0$, de donde $\boxed{v_4 = -v_1 + 2v_2}$. Podríamos intentar triangular de otra forma para conseguir otra expresión. Se propone hacerlo como ejercicio.
Otra manera de resolver es usando directamente la definición de combinación lineal: se buscan escalares α, β, γ que verifiquen:

$$(4,-1,1) = \alpha(0,1,1) + \beta(2,0,1) + \gamma(2,1,2).$$

Esto equivale a resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4 = 2\beta + 2\gamma \\ -1 = \alpha + \gamma \\ 1 = \alpha + \beta + 2\gamma \end{cases}.$$

Si el sistema fuera incompatible, $(4,-1,1)$ no sería combinación lineal de los vectores dados, pero a partir de lo hecho antes sabemos que no es así. El sistema es compatible.
Si fuera determinado la solución encontrada arriba sería la única posible, y si fuera indeterminado, habría infinitas maneras de expresarlo como combinación lineal de $(0,1,1)$, $(2,0,1)$ y $(2,1,2)$.
Resolvamos el sistema para ver en qué situación estamos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Reconstruimos el sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = -1 \\ \beta + \gamma = 2 \end{cases}$$

Podemos poner entonces: $\alpha = -1 - \gamma$, $\beta = 2 - \gamma$. El sistema es indeterminado, y todas las maneras de escribir el vector $(4,-1,1)$ como combinación lineal de $(0,1,1)$, $(2,0,1)$ y $(2,1,2)$ son:

$$(4,-1,1) = (-1-\gamma)(0,1,1) + (2-\gamma)(2,0,1) + \gamma(2,1,2).$$

Por ejemplo, si $\gamma = 0$, obtenemos la solución dada arriba. Le damos otro valor a γ para completar la respuesta, por ejemplo $\gamma = 1$ y obtenemos:

$$(4,-1,1) = -2(0,1,1) + (2,0,1) + (2,1,2).$$

7. Primero observemos que $\mathcal{S} = \{X \in R^3 / x_1 + 3x_3 = 0\}$ es un plano en R^3, luego su dimensión es 2, con lo cual una base de $\mathcal{S}$ es un conjunto de dos vectores $\{v_1, v_2\}$ que verifican: $\begin{cases} v_1 \in \mathcal{S} \\ v_2 \in \mathcal{S} \end{cases}$, y $\{v_1, v_2\}$ debe ser l.i. Por la primera condición, usando la ecuación de definición del subespacio, tenemos que:
$\begin{cases} k + 3 = 0 \\ 3 - 3 = 0 \end{cases}$. Entonces $k = -3$.
Debemos ver ahora si el conjunto $\{(-3,-3,1);(3,3,-1)\}$ es l.i.: no lo es, pues $(3,3,-1) = -(-3,-3,1)$. Entonces, el único valor de k que sirve para que se cumpla la primera condición no sirve para que se cumpla la segunda. Entonces,

$\boxed{\text{para ningún valor de } k, \text{ el conjunto } \{(k,k,1);(3,-k,-1)\} \text{ es base del subespacio } \mathcal{S}}$.

8. Primero buscamos una base de $\mathcal{S}$ para ver cuál es su dimensión: como $x_1 = x_3 - 2x_4$, la solución paramétrica del sistema es:
$(x_3 - 2x_4, x_2, x_3, x_4) = x_2(0,1,0,0) + x_3(1,0,1,0) + x_4(-2,0,0,1)$.
Entonces, $\{(0,1,0,0),(1,0,1,0),(-2,0,0,1)\}$ es un conjunto de generadores de $\mathcal{S}$, y

como es l.i., la dimensión de $\mathcal{S}$ es 3. $\boxed{\text{El conjunto } C_2 \text{ no es una base de } \mathcal{S}}$, pues tiene sólo dos vectores.

$\boxed{\text{El conjunto } C_1 \text{ es una base de } \mathcal{S}}$, pues es un conjunto de tres vectores de S -verificar, y es l.i.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{El conjunto } C_3 \text{ no es una base de } \mathcal{S}}$ pues es l.d.: $(2,1,2,0) = (1,1,1,0) + (1,0,1,0)$.

9. Buscamos a para que el vector $v = (1,3,a,2)$ pertenezca al subespacio $\mathcal{S} = \langle(1,-1,1,-1),(2,2,0,1)\rangle$. Esto significa que el vector v debe ser combinación lineal de $(1,-1,1,-1)$ y $(2,2,0,1)$. Utilizando la regla práctica dada anteriormente, basta con armar la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & a & 2 \end{pmatrix}$ y ver cuáles son las condiciones sobre a para que al triangular(sin cambiar la última fila de lugar, ésta se convierta en $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & a & 2 \end{pmatrix} \underset{F_3 \leftarrow F_3 - F_1}{\overset{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & a-1 & 3 \end{pmatrix} \sim_{F_3 \leftarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $\boxed{\text{el vector } v = (1,3,a,2) \text{ pertenece al subespacio } \mathcal{S} \text{ si y sólo si } a = -1}$.

10. Ahora, buscamos a para que el vector $v = (a,2a,3)$ pertenezca al subespacio $\mathcal{S} = \langle(1,1,-3),(0,-1,3\rangle$. El procedimiento es el mismo que en el ejercicio anterior.

Tenemos que triangular la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ a & 2a & 3 \end{pmatrix}$.

a. *Si* $a = 0$, *la matriz ya está triangulada.* En este caso es:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, y el vector $v = (0,0,3)$ no pertenece al subespacio $\mathcal{S}$ pues no se puede escribir como combinación lineal de los generadores de $\mathcal{S}$.

b. *Si* $a \neq 0$ *debemos triangular*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ a & 2a & 3 \end{pmatrix} \sim^{F_3 \leftarrow F_3 - aF_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & a & 3+3a \end{pmatrix} \sim^{F_3 \leftarrow F_3 + aF_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3+6a \end{pmatrix}$$

Entonces, el vector $v = (a, 2a, 3)$ pertenece a $\mathcal{S}$ si y sólo si $3 + 6a = 0$, esto es, si $a = -\frac{1}{2}$.
Observemos que en realidad no hacía falta separar el estudio en los casos a. y b. ya que al operar no se multiplicaba la fila transformada por a, sino otra. La respuesta es:
$\boxed{v = (a, 2a, 3) \text{ pertenece a } \mathcal{S} \text{ si y sólo si } a = -\frac{1}{2}}$.

11. Buscamos un vector v no nulo de $\mathcal{S} = \{x \in R^4 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ que pertenezca a $\mathcal{W} = \langle (1,1,-2,-2), (0,2,-1,-1) \rangle$.
Ya que v *es un vector de* $\mathcal{W}$, *se debe poder escribir como combinación lineal de los generadores de* $\mathcal{W}$. Pongamos entonces

$$v = \alpha(1,1,-2,-2) + \beta(0,2,-1,-1).$$

Hallar v *es encontrar* α *y* β.
Sabemos que v *debe estar en* $\mathcal{S}$, esto es, *debe verificar la ecuación de* $\mathcal{S}$. Como

$$v = (\alpha, \alpha + 2\beta, -2\alpha - \beta, -2\alpha - \beta)$$

entonces, reemplazando en la ecuación de $\mathcal{S}$,

$$2\alpha + (\alpha + 2\beta) + (-2\alpha - \beta) = 0.$$

Luego,

$$\alpha + \beta = 0.$$

Esto significa que si en $(\alpha, \alpha + 2\beta, -2\alpha - \beta, -2\alpha - \beta)$ le damos valores a α y β de manera que se cumpla $\alpha + \beta = 0$, estaremos cumpliendo simultáneamente las condiciones impuestas para estar en ambos subespacios -hemos encontrado entonces $\mathcal{S} \cap \mathcal{W}$-. El ejercicio nos pide hallar uno de esos vectores. Por ejemplo, podemos tomar $\alpha = 1$ y $\beta = -1$, obteniendo $\boxed{v = (1,-1,-1,-1)}$.

12. Entendamos primero qué es lo que se está pidiendo. Extender un conjunto dado a una base de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ (o de un subespacio $\mathcal{S}$) significa *encontrar una base de* $\mathcal{V}$ (o de $\mathcal{S}$) *que contenga el conjunto dado*.

a. En este caso el conjunto dado es $\{(1,-2)\}$ y el espacio vectorial es R^2. Lo que se quiere hacer es encontrar una base de R^2 que contenga el vector $(1,-2)$. Para esto, como sabemos que la dimensión de R^2 es dos, basta con encontrar un vector v tal que $\{(1,-2), v\}$ sea l.i. Por ejemplo, $\boxed{\text{el conjunto } \{(1,-2),(0,1)\} \text{ es una base de } R^2 \text{ que extiende a } \{(1,-2)\}}$.

b. Ahora, como la dimensión de R^3 es tres, buscamos dos vectores v y w tal que $\{(1,1,0), v, w\}$ sea l.i. Por ejemplo, $v = (1,0,0)$, $w = ((0,0,1)$.
Verifiquemos que efectivamente $\{(1,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$ es l.i.
Para eso triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim^{F_2 \leftarrow F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como esta última matriz está triangulada y no tiene ninguna fila de ceros, el conjunto de tres vectores $\{(1,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$ es l.i., y por lo tanto es una base de R^3. Entonces,

$\boxed{\text{el conjunto } \{(1,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\} \text{ es una base de } R^3 \text{ que extiende a } \{(1,1,0)\}}$.

c. Como $\{(1,1,0),(2,2,0)\}$ ya tiene dos elementos, debe buscarse un vector v tal que $\{(1,1,0),(2,2,0),v\}$ sea l.i. Pero como $\{(1,1,0),(2,2,0)\}$ es l.d. -ya que $(2,2,0) = 2(1,1,0)$-, cualquiera sea v el conjunto $\{(1,1,0),(2,2,0),v\}$ es l.d. Entonces,

$\boxed{\text{no se puede extender } \{(1,1,0),(2,2,0)\} \text{ a una base de } R^3}$.

d. $\{(1,1,0),(2,2,3)\}$ es l.i:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim^{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A partir de la matriz que está triangulada es más fácil elegir un vector v tal que $\{(1,1,0),(2,2,3),v\}$ sea l.i. Por ejemplo,

$\boxed{\{(1,1,0),(2,2,3),(0,1,0)\} \text{ es una base de } R^3 \text{ que extiende a } \{(1,1,0),(2,2,3)\}}$.