

PRÁCTICA 2

Sistemas de ecuaciones

Hasta aquí hemos visto sistemas de ecuaciones de hasta 3 incógnitas.

Ejemplo:

Escribir en forma paramétrica las soluciones de las siguientes ecuaciones o sistemas de ecuaciones en R^3 :

1. $x + 3y - z = 0$

2.
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Solución:

1. Despejamos z , obteniendo $z = x + 3y$. Un punto es solución del sistema si es de la forma $X = (x, y, x + 3y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 3)$, esto es, la solución dada en forma paramétrica es $X = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 3)$.

2. De la primera ecuación, despejamos y , obteniendo $y = 1 - x$. Entonces, X es solución si $X = (x, 1 - x, 2) = x(1, -1, 0) + (0, 1, 2)$. Ahora, la solución expresada paraméricamente es $X = x(1, -1, 0) + (0, 1, 2)$.

En el primer caso, tenemos un plano en el espacio; en el segundo tenemos una recta.

Resolver estos sistemas es inmediato, *lo que queremos hacer ahora es dar un método sistemático para resolver sistemas lineales que pueden tener más ecuaciones y más incógnitas.*

Tendremos m ecuaciones lineales con n incógnitas. En el primer ejemplo, hay una ecuación: $m = 1$, en el segundo: $m = 2$. En ambos hay 3 incógnitas: $n = 3$.

En lo que sigue, en lugar de x, y, z usaremos x_1, x_2, \dots, x_n .

A los coeficientes que multiplican las variables los notaremos a_{ij} : el primer índice nos dirá en qué ecuación está ubicado, y el segundo a qué variable multiplica. A los términos independientes los llamaremos c_i : el subíndice nos dice en qué ecuación está.

En general, un *sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas* es de la forma:

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Si todos los términos independientes son cero, el sistema se llama *homogéneo*. Es el caso del primer ejemplo dado arriba.

Todo sistema tiene un sistema homogéneo asociado: el que se obtiene a partir de las mismas ecuaciones, pero cambiando todos los c_i por 0.

Por ejemplo, el sistema homogéneo asociado al ejemplo 2 es $\begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Notación matricial:

Con los coeficientes de las m ecuaciones de un sistema de n incógnitas se arma una matriz de m por n (una fila por ecuación, una columna por incógnita):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esta matriz se llama *matriz de coeficientes* del sistema.

La *matriz ampliada* es la que se obtiene agregando una columna con los términos independientes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots & c_2 \\ & & \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \vdots & c_m \end{pmatrix}$$

Si la matriz de coeficientes tiene m filas y n columnas, la matriz ampliada tiene m filas y $n+1$ columnas.

Ejemplo

Dado el sistema: $S \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$

1. Ver si los puntos: $A = (0, 0, 0, 0)$; $B = (3, -1, 0, 0)$; $C = (1, 1, 0, 0)$; $D = (0, -1, 0, 0)$ son soluciones del sistema.
2. Hallar la matriz de coeficientes.
3. Hallar la matriz ampliada.
4. Escribir en forma paramétrica las soluciones del sistema.

Soluciones

1. Para cada punto dado, debe verse que satisfaga todas las ecuaciones del sistema:
 en el caso de A , claramente no es solución pues $0 + 0 - 0 + 2 * 0 \neq 2$.
 Observemos que para que el origen sea solución, el sistema debe ser homogéneo.

Para B : como $\begin{cases} 3 + (-1) - 0 + 2.0 = 2 \\ -1 = -1 \end{cases}$, resulta que B es solución del sistema.

C no es solución porque, si bien verifica la primera ecuación, no verifica la segunda; D no es solución porque no verifica la primera ecuación, aunque verifica la segunda.

2. matriz de coeficientes $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \vdots & -1 \end{pmatrix}$

4. Para hallar las soluciones, procedemos como lo hacíamos en la práctica 1. Despejemos por ejemplo x_4 de la segunda ecuación

$$x_4 = -1 - x_2 - x_3$$

Ahora lo sustituimos en la primera

$$x_1 + x_2 - x_3 + 2(-1 - x_2 - x_3) = 2$$

Distribuyendo y agrupando, obtenemos:

$$x_1 - x_2 - 3x_3 - 2 = 2$$

Despejemos x_3

$$x_3 = \frac{2 - (x_1 - x_2 - 2)}{-3} = \frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{3} - \frac{4}{3}$$

Tenemos entonces x_3 en función de x_1 y x_2 ; reemplazando esta expresión en la que teníamos de x_4 , obtendremos también x_4 en función de x_1 y x_2

$$x_4 = -1 - x_2 - \left(\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{3} - \frac{4}{3} \right) = -\frac{x_1}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}$$

Un punto $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ es solución si verifica

$$X = \left(x_1, x_2, \frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{3} - \frac{4}{3}, -\frac{x_1}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3} \right) = x_1 \left(1, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right) + x_2 \left(0, 1, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right) + \left(0, 0, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

La solución paramétrica es entonces

$$X = x_1 \left(1, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right) + x_2 \left(0, 1, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right) + \left(0, 0, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Triangulación. Método de Gauss. Rango de una matriz

Observemos que si tenemos el sistema

$$S : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

tiene solución inmediata: de la última ecuación obtenemos valor de x_3 , sustituyendo x_3 en la segunda obtenemos x_2 y, reemplazando x_2 y x_3 por sus valores en la primera, obtenemos x_1 . La solución es el punto $(-1, -2, 2)$

No todos los sistemas son tan inmediatos, por ejemplo:

$$S' : \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

no es tan inmediato de resolver. Sin embargo, la solución de ambos sistemas es la misma. Diremos que *dos sistemas son equivalentes tienen el mismo conjunto de soluciones*. Es el caso de S y S' . La notación que usaremos es: $S \sim S'$.

Lo que sigue tiene por objeto obtener un sistema equivalente a uno dado, de manera que sea más fácil encontrar el conjunto de soluciones. Para esto, veamos qué operaciones se pueden realizar.

Operaciones elementales

1. Si tenemos una ecuación y multiplicamos a ambos miembros por un número no nulo, no alteramos el conjunto de soluciones. En general, si tenemos un sistema S , el sistema S' que se obtiene multiplicando una ecuación del mismo por un escalar no nulo es un sistema equivalente al dado.

Por ejemplo, el sistema

$$S_1 : \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

es equivalente a S dado arriba.

Hemos multiplicado por 2 la primera ecuación.

En términos de matrices asociadas, podemos abreviar lo hecho poniendo

$(F_i) \sim (kF_i)$, $k \neq 0$: indicamos así que se ha multiplicado por k la fila i .

Podemos escribir también: $F_i \leftarrow kF_i$: en lugar de F_i pusimos kF_i .

2. Intercambiar dos ecuaciones en un sistema nos da un sistema equivalente.

Por ejemplo, si

$$S_2 : \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

entonces $S_2 \sim S_1$.

Podemos indicar lo hecho poniendo: $\begin{pmatrix} F_i \\ F_j \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} F_j \\ F_i \end{pmatrix}$.

También como $F_i \leftrightarrow F_j$: F_i intercambió su lugar con F_j .

3. Reemplazar una ecuación por ella misma más un múltiplo de otra.

Por ejemplo, $S_3 : \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ se ha obtenido a partir de S_2

reemplazando la segunda ecuación por ella misma más 3 veces la tercera.

Detallemos los pasos realizados: considerando la segunda ecuación de S_2 junto

con la tercera, esto es, $\begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$, hemos multiplicado la última por "3"

$\begin{cases} x_3 = 2 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$ y luego hemos sumado miembro a miembro, obteniendo

Los sistemas son equivalentes porque, así como de S_2 podemos pasar a S_3 , también de S_3 podemos pasar a S_2 .

Abreviadamente, escribimos: $(F_i) \sim (F_i + kF_j)$.

Lo indicamos también como: $F_i \leftarrow F_i + kF_j$: en lugar de F_i pusimos $F_i + kF_j$.

Observemos que $S_3 = S'$, de donde vemos que a partir de S llegamos a S' haciendo operaciones elementales. El más fácil de resolver era S , luego, si nos dan S' lo tratamos de llevar a una forma equivalente del tipo como está presentado S : aclaremos cómo es.

Matriz triangulada:

Una matriz de m filas y n columnas *está triangulada por filas* si en cada fila hay por lo menos un cero más que en la fila de arriba, yendo de izquierda a derecha.

Ejemplos:

1. Si la matriz tiene una sola fila, no hay condición. Está (trivialmente) triangulada.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ están trianguladas,

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ no lo están.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ están trianguladas.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ no lo están

Método de Gauss

Éste es un método sistemático que encuentra una matriz triangulada equivalente a una dada. El sistema asociado a la matriz triangulada será equivalente al dado inicialmente, pero de resolución inmediata.

Ejemplos

1. Encontrar una matriz triangulada por filas equivalente a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Observemos que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ también es triangular y es equivalente a

la dada.

2. Obtener sistemas equivalentes a los dados que tengan matriz triangular:

a.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 = 2 \\ -7x_3 = 4 \end{cases}$$

Solución

1. a. La matriz ampliada asociada al sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

Triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 1 \\ -2 & -4 & -1 & : & 2 \\ 0 & 1 & 1 & : & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 1 \\ 0 & 0 & -7 & : & 4 \\ 0 & 1 & 1 & : & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 1 \\ 0 & 1 & 1 & : & -1 \\ 0 & 0 & -7 & : & 4 \end{pmatrix}.$$

Luego, es sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ -7x_3 = 4 \end{cases}$ es equivalente al dado.

b. Partimos ahora de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 1 \\ -2 & -4 & -1 & : & 2 \\ 0 & 0 & -7 & : & 4 \end{pmatrix}.$

Como antes, tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 1 \\ -2 & -4 & -1 & : & 2 \\ 0 & 0 & -7 & : & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 1 \\ 0 & 0 & -7 & : & 4 \\ 0 & 0 & -7 & : & 4 \end{pmatrix}.$$

Como esta última matriz no está triangulada, debemos seguir un paso más.

Calculamos entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 1 \\ 0 & 0 & -7 & : & 4 \\ 0 & 0 & -7 & : & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 1 \\ 0 & 0 & -7 & : & 4 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

Rango de una matriz:

El *rango* de una matriz es la cantidad de filas no nulas que quedan al terminar de triangularla. (Una fila nula es la que tiene todos sus coeficientes iguales a cero.)

Por ejemplo:

El rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 1 \\ -2 & -4 & -1 & : & 2 \\ 0 & 1 & 1 & : & -1 \end{pmatrix}$ es 3, porque ya hicimos la triangulación

correspondiente y sabemos que es equivalente a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & : & 1 \\ 0 & 1 & 1 & : & -1 \\ 0 & 0 & -7 & : & 4 \end{pmatrix}$, que ya

está triangulada y tiene sus tres filas no nulas.

El rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & :1 \\ -2 & -4 & -1 & :2 \\ 0 & 0 & -7 & :4 \end{pmatrix}$ es 2, ya que

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & :1 \\ -2 & -4 & -1 & :2 \\ 0 & 0 & -7 & :4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & :1 \\ 0 & 0 & -7 & :4 \\ 0 & 0 & 0 & :0 \end{pmatrix}$: la cantidad de filas no nulas al terminar de triangular es dos.

Es importante señalar que *el rango no depende de la triangulación efectuada*. La última matriz calculada puede ser distinta, pero no la cantidad de filas no nulas.

Por ejemplo, haciendo otras operaciones elementales, podemos concluir que

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & :1 \\ -2 & -4 & -1 & :2 \\ 0 & 0 & -7 & :4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & :1 \\ 0 & 0 & 1 & :-\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & :0 \end{pmatrix}$. Obviamente, esta matriz también tiene rango dos.

Sistemas compatibles determinados e indeterminados. Sistemas incompatibles. Sistemas indeterminados.

Ejemplos

Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, determinar el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada, y hallar, si existen, las soluciones del sistema.

$$1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$2. S_a \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \quad S_b \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$S_c \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Solución

1. Escribimos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

Para calcular los rangos, debemos triangular. Es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - 3F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right).$$

El rango de $A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$ es 3, ya que no hay filas nulas.

También el rango de $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array} \right)$ es igual a 3.

Observemos que siempre debe ser el rango de $A \leq$ rango de A' , ya que esta última matriz agrega coeficientes: si una fila ya tenía algún lugar distinto de 0, la más larga tendrá también, por lo menos, ese lugar distinto de 0.

Para hallar la solución del sistema, construimos el sistema equivalente al dado asociado con la matriz triangulada y lo resolvemos.

$$\text{Consideramos entonces: } \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_2 + 4x_3 = -4 \\ 3x_3 = 2 \end{cases}.$$

Despejando de la tercera ecuación, obtenemos $x_3 = \frac{2}{3}$.

Reemplazando en la segunda ecuación: $2x_2 + 4 * \frac{2}{3} = -4$, de donde $x_2 = -\frac{10}{3}$.

Usamos la primera ecuación para obtener el valor de x_1 : $x_1 - 2 * (-\frac{10}{3}) - \frac{2}{3} = 3$, obteniendo $x_1 = -3$.

La respuesta es: la solución del sistema es el punto $(-3, -\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$.

Cuando, como en este caso, la solución de un sistema es un solo punto, decimos que el sistema es *compatible determinado*.

Notemos que este método nos dice que *vamos despejando de abajo para arriba*: primero despejamos en la tercera ecuación, la variable despejada la reemplazamos en la segunda ecuación, y así "seguimos subiendo". En general, dada una ecuación, es equivalente elegir una u otra variable para despejar. Si se quiere tener un método sistemático, se puede despejar, en cada ecuación, la de

subíndice menor.

2. Observemos primero que las matrices asociadas a los tres sistemas dados es la misma. Para abreviar las cuentas, haremos una *resolución simultánea* de los mismos. ¿Qué significa esto? Que escribiremos todas las matrices ampliadas dentro de una matriz, separando con ":" los términos independientes.

Consideremos entonces la gran matriz:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & : & 1 & : & 1 & : & 0 \\ 2 & 5 & -6 & : & 0 & : & 0 & : & 0 \\ -1 & -3 & 2 & : & 3 & : & 1 & : & 0 \end{pmatrix}$$
. ¿Cómo se

interpreta?

"Olvidando" las dos últimas columnas, tenemos la matriz ampliada asociada al primer sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & : & 1 \\ 2 & 5 & -6 & : & 0 \\ -1 & -3 & 2 & : & 3 \end{pmatrix},$$

"olvidando" la cuarta y la última columna, tenemos la matriz ampliada asociada al segundo sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & : & 1 \\ 2 & 5 & -6 & : & 0 \\ -1 & -3 & 2 & : & 1 \end{pmatrix},$$

y "olvidando" la cuarta y quinta columna, tenemos la matriz ampliada asociada al último sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & : & 0 \\ 2 & 5 & -6 & : & 0 \\ -1 & -3 & 2 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

Triangulamos todos a la vez, usando la gran matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & : & 1 & : & 1 & : & 0 \\ 2 & 5 & -6 & : & 0 & : & 0 & : & 0 \\ -1 & -3 & 2 & : & 3 & : & 1 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & : & 1 & : & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & -2 & : & -2 & : & 0 \\ -1 & -3 & 2 & : & 3 & : & 1 & : & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & : & 1 & : & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & -2 & : & -2 & : & 0 \\ 0 & -1 & -2 & : & 4 & : & 2 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & : & 1 & : & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & -2 & : & -2 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 2 & : & 0 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

Las matrices ampliadas son respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & : & 1 \\ 0 & 1 & 2 & : & -2 \\ 0 & 0 & 0 & : & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & : & 1 \\ 0 & 1 & 2 & : & -2 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & : & 0 \\ 0 & 1 & 2 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

Los sistemas asociados son:

$$S_a \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -2 \\ 0 = 2 \end{cases} \quad S_b \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -2 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad S_c \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Resolvamos cada uno:

- a. Primero veamos el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada.

Es el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ igual a 2, y el rango de

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$ es 3.

Interpretamos la tercera ecuación: buscamos para qué valores de las variables $0 = 2$ ($0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2$). Cualquiera sea el valor que le demos a x_1 , x_2 y x_3 , nunca conseguiremos que $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2$. De acá concluimos que el sistema *no* tiene ninguna solución. Esto se dará cada vez que tengamos una fila del tipo: todos los coeficientes iguales a cero, excepto el correspondiente al término independiente.

En estos casos, *el sistema no tendrá solución*, y diremos que el sistema es *incompatible*.

Estudiando los rangos de la matriz asociada y de la matriz ampliada:

cada vez que tengamos una fila del tipo $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \neq 0 \end{pmatrix}$ *el rango de la matriz de coeficientes es menor que el rango de la matriz ampliada*.

- b. La matriz de coeficientes es la misma que en el caso anterior, pero el

rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$ es 2.

Entonces el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada son iguales, **no** aparecen filas de la forma

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \neq 0 \end{pmatrix}$ y el sistema es compatible.

Resolvemos entonces el sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$.

Despejamos x_2 de la segunda ecuación, obteniendo: $x_2 = -2 - 2x_3$.

Reemplazando en la primera ecuación: $x_1 + 2(-2 - 2x_3) - 4x_3 = 1$.

Distribuimos: $x_1 - 8x_3 - 4 = 1$. Despejando, tenemos que $x_1 = 8x_3 + 5$.

Entonces, $X = (x_1, x_2, x_3)$ es solución si

$X = (8x_3 + 5, -2 - 2x_3, x_3) = (8x_3, 2x_3, x_3) + (5, -2, 0)$.

La solución es entonces: $X = x_3(8, -2, 1) + (5, -2, 0)$.

Observemos que hay infinitas soluciones, porque tenemos un parámetro. Luego, este sistema es *compatible indeterminado*.

- c. Cuando el sistema es homogéneo, el rango de la matriz de coeficiente y de la matriz ampliada son siempre iguales, ya que si los términos independientes son todos ceros la matriz ampliada no puede aumentar el rango.

En este caso, el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es 2, al igual que el de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & :0 \\ 0 & 1 & 2 & :0 \\ 0 & 0 & 0 & :0 \end{pmatrix}.$$

Resolvemos entonces el sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$.

Siguiendo el mismo camino que en el caso anterior, obtenemos la solución paramétrica: $X = x_3(8, -2, 1)$. La solución es una recta paralela a la anterior que pasa por el origen, el sistema es compatible indeterminado.

Observaciones acerca de los sistemas homogéneos:

Los sistemas homogéneos son siempre compatibles porque $(0, \dots, 0)$ siempre es solución. Debe verse en cada caso si es *determinado* o *indeterminado*.

Será determinado en el caso de que, justamente, podamos determinar el valor de cada variable. Para que esto pase, debe haber una ecuación para cada incógnita.

El rango de la matriz de coeficientes (= rango de la ampliada) deberá ser entonces igual al número de incógnitas.

Tomando por ejemplo el sistema ya triangulado: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$.

Si despejamos cada variable, comenzando por la tercera ecuación, vamos obteniendo sucesivamente los valores $x_3 = 0, x_2 = 0, x_1 = 0$.

Será *indeterminado* si el rango de la matriz de coeficientes es menor que el número de incógnitas. Como ejemplo, ver el sistema S_c .

Observaciones acerca de los sistemas no homogéneos

En general, un sistema de n incógnitas puede ser:

1. *Incompatible*: vimos en el ejemplo S_a que el caso incompatible se presenta

cuando el rango de la matriz de coeficientes es menor que el rango de la matriz ampliada.

2. Compatible: los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales. Llamémoslo **m**.

a. Si además **m = n**, el sistema es *determinado*. Habrá una ecuación para poder determinar cada variable.

b. Si **m < n**, el sistema es *indeterminado*. En este caso, daremos la solución en forma paramétrica. Ver por ejemplo, S_b .
Cuántos parámetros van a quedar en este caso?. Veamos un par de ejemplos sencillos:

i. $x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6$. En este caso, $m = 1$ (una ecuación) y $n = 4$ (tres incógnitas). Si tengo sólo una ecuación, no podré despejar más de una variable. Por ejemplo, $x_4 = 6 - x_1 + x_2 - 3x_3$. La solución en forma paramétrica es, abreviadamente: $X = (x_1, x_2, x_3, 6 - x_1 + x_2 - 3x_3)$. Si sólo puedo despejar una variable, y tenía cuatro, quedan tres sin despejar.

ii.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$
 . Resolvamos: de la segunda

ecuación, $x_4 = -x_2$, reemplazando en la primera:

$x_1 - x_2 + 3x_3 - x_2 = 6$, de donde $3x_3 = 6 - x_1 + 2x_2$, con lo cual $x_3 = 2 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2$. La solución es:

$X = (x_1, x_2, 2 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2, 2 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2)$. Puedo despejar dos variables, una por cada ecuación. Tenía cuatro variables, quedan dos sin despejar.

iii. En general, si un sistema está *triangulado*, (con lo cual, el número de ecuaciones es igual al rango), podré despejar una variable por cada ecuación, esto es, podré despejar **n** variables. Si en principio tenía **m**, quedan $m - n$ sin despejar. (En el primer ejemplo: $4-1=3$, en el segundo: $4-2=2$).

c. El caso **m > n** no lo contemplamos, ya que al triangular un sistema, no importa cuantas ecuaciones tenga, será equivalente a uno de rango menor o igual a la cantidad de incógnitas. (Resuelva un par de ejemplos para ver como van "desapareciendo" las ecuaciones sobrantes).

Observación:

Notemos que, así como triangulamos "por abajo", podríamos seguir triangulando "por arriba". Por ejemplo, en el caso del sistema
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$
, la matriz asociada es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Ahora, al estar triangulada por arriba y por abajo, despejamos de cada ecuación la primera variable que aparece con coeficiente no nulo, y no hay necesidad de "ir subiendo" para despejar las variables.

Tenemos entonces el sistema $\begin{cases} x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$, de donde $x_1 = 6 - 3x_3 - 2x_4$, y

$x_2 = -x_4$ y ya está terminado el trabajo de despejar. Este método es conocido como "Gauss-Jordan". (Si le interesa esto, lea al final el apartado: "Pivotes".)

Sistemas con parámetros

1. Determinar para qué valores de k los siguientes sistemas son determinados, indeterminados o incompatibles:

$$\text{a. } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2 \\ -3x_1 - 8x_2 - 13x_3 = -5 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = k \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 8 \\ 4x_1 - 5x_2 + 10x_3 = 6 \\ 5x_1 + kx_2 + 13x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} x_1 + kx_2 = 3 \\ kx_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ kx_2 + 3x_3 = 2 \\ (k^2 - 1)x_3 = k + 1 \end{cases}$$

2. Analizar las soluciones del sistema para los distintos valores de α y β .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + \alpha x_2 = \beta \end{cases}$$

3. Sabiendo que $(0, 1, -1)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \beta x_2 - 3x_3 = 2 \\ \alpha x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

analizar las soluciones del mismo para los distintos valores de α y β .

Solución

1. Primero entendamos de qué se trata el ejercicio. Hay que decidir si el sistema es compatible determinado o indeterminado, o si es incompatible. Pero en lugar de uno de los coeficientes hay un parámetro: k . Se trata de ver qué valores debe tomar k para que el sistema sea compatible determinado, qué valores para que sea indeterminado y qué valores para que sea incompatible. Al terminar de resolver, debemos ser capaces de contestar, para cada valor de k , en qué caso estamos.

Primero escribamos y triangulemos pensando que k es un número -cualquiera. Empecemos.

a. Escribimos la matriz ampliada y triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & : & 2 \\ -3 & -8 & -13 & : & -5 \\ -1 & -2 & -3 & : & k \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + 3F_1} \\ \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + F_1} \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & : & 2 \\ 0 & 1 & 2 & : & 1 \\ 0 & 1 & 2 & : & k+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & : & 2 \\ 0 & 1 & 2 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & k+1 \end{pmatrix}$$

Para que sea compatible,

$$\text{rango de } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ debe ser igual al rango de } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & : & 2 \\ 0 & 1 & 2 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & k+1 \end{pmatrix}.$$

Como el primero es 2, el rango de la matriz ampliada también tiene que ser 2, entonces: $k+1 = 0$, esto es, $k = -1$.

Determinado no puede ser nunca, pues el rango de la matriz de coeficientes es 2, que es menor que 3, la cantidad de variables.

Luego, si $k = -1$, el sistema es compatible indeterminado y

si $k \neq -1$, el sistema es incompatible, porque el rango de la matriz de coeficientes es 2, y el rango de la matriz ampliada es 3.

Observar que todos los valores posibles del parámetro han sido contemplados.

b. Procedemos igual que en el inciso anterior. Escribimos primero la matriz ampliada:

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 & : & 8 \\ 4 & -5 & 10 & : & 6 \\ 5 & k & 13 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

Triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 & : & 8 \\ 4 & -5 & 10 & : & 6 \\ 5 & k & 13 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{matrix} F_2 \leftarrow F_2 - 4F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 - 5F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 & : & 8 \\ 0 & 19 & -2 & : & -26 \\ 0 & k+30 & -2 & : & -40 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\sim]{F_2 \leftarrow \frac{1}{19}F_2} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 & : & 8 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{19} & : & \frac{-26}{19} \\ 0 & k+30 & -2 & : & -40 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{matrix} F_3 \leftarrow F_3 - (k+30)F_2 \\ \text{seguir la cuenta} \\ \text{con lápiz y papel} \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 & : & 8 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{19} & : & \frac{-26}{19} \\ 0 & 0 & \frac{2}{19}k + \frac{22}{19} & : & \frac{26}{19}k + \frac{20}{19} \end{pmatrix}$$

Para que sea compatible determinado, basta con pedir que $\frac{2}{19}k + \frac{22}{19} \neq 0$, así aseguramos que el rango de la matriz de coeficiente y la ampliada tengan rango 3. Luego,

si $k \neq -11$, el sistema es compatible determinado.

Para que sea compatible indeterminado, el rango de la matriz ampliada debe ser menor que 3.

Como la única fila que se puede anular es la última, pedimos que $\frac{2}{19}k + \frac{22}{19} = 0$, y $\frac{26}{19}k + \frac{20}{19} = 0$. Entonces $k = -11$ y $k = -\frac{20}{26}$. Luego, este caso no se puede dar porque k no puede tomar dos valores a la vez.

No hay valores de k que hacen que el sistema sea indeterminado.

Para que sea incompatible, quedan todos los otros valores de k -uno sólo en este caso.

Verifiquemos: si $k = -11$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el rango de la matriz ampliada es 3. Esto es,

si $k = -11$, el sistema es incompatible.

c. Escribimos la matriz ampliada y triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & : & 3 \\ k & 4 & : & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{F_2 \leftarrow F_2 - kF_1} \begin{pmatrix} 1 & k & : & 3 \\ 0 & 4 - k^2 & : & 6 - 3k \end{pmatrix}$$

Razonamos de la misma manera que en los casos anteriores, relacionando el rango con la compatibilidad o no del sistema.

Para que sea compatible determinado, debe ser $4 - k^2 \neq 0$, esto es, $k \neq 2$ y $k \neq -2$.

Para que sea compatible indeterminado, debe ser $4 - k^2 = 0$ y $6 - 3k = 0$. Los valores que satisfacen la primera condición son 2 y -2; la segunda se satisface sólo para $k = 2$.

Luego, ambas ecuaciones se satisfacen sólo para $k = 2$.

Entonces, si $k = 2$, el sistema es compatible indeterminado.

Para que sea incompatible, debe ser $4 - k^2 = 0$ y $6 - 3k \neq 0$.

Entonces, si $k = -2$, el sistema es incompatible.

d. La matriz ampliada es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & :1 \\ 0 & k & 3 & :2 \\ 0 & 0 & k^2 - 1 & :k+1 \end{pmatrix}.$$

Nos fijamos si está triangulada. Claramente, la fila 2 le agrega por lo menos un cero por izquierda a la fila 1, pero la fila 3 ¿le agrega por lo menos un cero a la fila 2? Estamos seguros de que sí, sólo si $k \neq 0$. Porque si $k = 0$, la matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & :1 \\ 0 & 0 & 3 & :2 \\ 0 & 0 & -1 & :1 \end{pmatrix}:$$

no está triangulada.

Entonces, para seguir triangulando o no, debemos saber si $k = 0$ ó $k \neq 0$.

Si $k = 0$ la matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & :1 \\ 0 & 0 & 3 & :2 \\ 0 & 0 & -1 & :1 \end{pmatrix}.$$

Hacemos $F_2 \leftarrow \frac{1}{3}F_2$ y obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & :1 \\ 0 & 0 & 1 & : \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -1 & :1 \end{pmatrix}.$$

Seguimos triangulando. Haciendo $F_3 \leftarrow F_3 + F_2$ nos queda

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & :1 \\ 0 & 0 & 1 & : \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & : \frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

El sistema asociado a esta matriz es incompatible. Entonces,

si $k = 0$ el sistema es incompatible.

Si $k \neq 0$, la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & :1 \\ 0 & k & 3 & :2 \\ 0 & 0 & k^2 - 1 & :k+1 \end{pmatrix}$$

sí está triangulada. Debemos ver qué pasa con los rangos.

Para que el sistema sea *compatible determinado*: queremos que el rango de la matriz de coeficientes sea 3, que es la cantidad de incógnitas.

Para esto, debe ser, $k^2 - 1 \neq 0$.

Entonces (recordando que estamos en el caso $k \neq 0$), si

$k \neq 0, k \neq 1$ y $k \neq -1$, el sistema es compatible determinado.

Para que el sistema sea *compatible indeterminado*, debe ser $k^2 - 1 = 0$ y $k + 1 = 0$.

Las condiciones se cumplen simultáneamente si $k = -1$.

Entonces, si $k = -1$, el sistema es compatible indeterminado.

Por último, el sistema es incompatible si $k^2 - 1 = 0$ y $k + 1 \neq 0$.

Entonces, si $k = 1$ el sistema es incompatible, y junto a la condición anterior obtenemos: si $k = 0$ o si $k = 1$, el sistema es incompatible.

2. Queremos resolver
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + \alpha x_2 = \beta \end{cases}$$
 . Escribimos la matriz ampliada y

triangulamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & : & 2 \\ 0 & 1 & 2 & : & -2 \\ 1 & \alpha & 0 & : & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & : & 2 \\ 0 & 1 & 2 & : & -2 \\ 0 & \alpha - 2 & -2 & : & \beta - 2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - (\alpha - 2)F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & : & 2 \\ 0 & 1 & 2 & : & -2 \\ 0 & 0 & -2\alpha + 2 & : & \beta + 2\alpha - 6 \end{pmatrix}$$

(Se recomienda verificar este cálculo, por ejemplo, el cálculo del último coeficiente es $(\beta - 2) - (\alpha - 2)(-2) = (\beta - 2) + 2(\alpha - 2) = \beta + 2\alpha - 6$.)

a. Si $-2\alpha + 2 \neq 0$, el sistema es compatible determinado (*no hace falta mirar los términos independientes, ya que en este caso, el rango de la matriz de coeficientes del sistema y el rango de la matriz ampliada son iguales*).

Esto es, si $\alpha \neq 1$, el sistema es compatible determinado cualquiera sea el valor de β .

b. Si $-2\alpha + 2 = 0$, -esto es, si $\alpha = 1$ - la matriz de coeficientes tiene rango 2. Dependiendo del rango de la matriz ampliada, el sistema será compatible indeterminado o incompatible. Como $\alpha = 1$, el término independiente es $\beta + 2 - 6 = \beta - 4$. Luego:

i. Si $\beta - 4 = 0$, el rango de la matriz ampliada también es 2 y el sistema es compatible indeterminado.

c. Si $\beta - 4 \neq 0$, el rango de la matriz ampliada 3 y el sistema es incompatible. Resumiendo:.

Si $\alpha \neq 1$ el sistema es compatible determinado (para cualquier valor de β).

Si $\alpha = 1$
$$\begin{cases} \beta = 4 & \text{el sistema es compatible indeterminado.} \\ \beta \neq 4 & \text{el sistema es incompatible.} \end{cases}$$

3. Ahora sabemos que $(0, 1, -1)$ es solución del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ \beta x_2 - 3x_3 = 2 \\ \alpha x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Esto significa que $(0, 1, -1)$ verifica todas las ecuaciones del sistema, entonces:

$$\begin{cases} 0 + 1 - (-1) = 2 & (1) \\ \beta * 1 - 3(-1) = 2 & (2) \\ -1 - 3(-1) = 2 & (3) \end{cases}$$

Las ecuaciones (1) y (3) no nos aportan ningún dato sobre los parámetros (si no se cumplieran, el dato estaría mal).

De la segunda obtenemos que $\beta = -1$. Entonces, el sistema que hay que estudiar es

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_2 - 3x_3 = 2 \\ \alpha x_1 - x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Procedemos ahora como en el ejercicio anterior, con la ventaja de que tenemos ahora un solo parámetro.

Escribimos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ \alpha & -1 & -3 & 2 \end{array} \right)$$

En lugar de seguir la triangulación habitual, conviene hacer $F_3 \leftarrow F_3 - F_2$, obteniendo la matriz equivalente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Luego:

- si $\alpha = 0$, el sistema es compatible indeterminado.
- si $\alpha \neq 0$, dividimos la última fila por α obteniendo la matriz equivalente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

y como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & :2 \\ 0 & -1 & -3 & :2 \\ 1 & 0 & 0 & :0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & :2 \\ 0 & -1 & -3 & :2 \\ 0 & 0 & 4 & :-4 \end{pmatrix}$$

resulta que el sistema es compatible indeterminado. Resumiendo:

β debe ser -1 .

Si $\alpha = 0$, el sistema es compatible indeterminado, si $\alpha \neq 0$, es compatible determinado.

Observemos que, el caso incompatible no se puede presentar, ya que partimos de tener como condición: "(0, 1, -1) es solución del sistema".

Aplicaciones

1. Las harinas de soja, garbanzos y trigo burgol intervienen en la composición de tres sustitutos de la carne vacuna fabricados por la empresa VEGETARIANA. En la siguiente tabla se detalla la composición de los tres alimentos.

	SOJI	GARBI	BURGI
Soja	50%	10%	20%
Garbanzos	30%	50%	20%
Trigo	20%	40%	60%

La compañía pretende agotar los insumos que reciba.

La cantidad de toneladas de cada tipo de harina a recibir es una de las tres opciones siguientes:

	OPCIÓN I	OPCIÓN II	OPCIÓN III
Soja	2	4	6
Garbanzos	3	3	6
Trigo	5	3	8

Determinar las cantidades de los tres alimentos que pueden producirse para cada opción de insumos recibidos.

Solución:

Nos están preguntando qué cantidad de cada uno de los tres alimentos debe producirse.

Pongamos:

x =cantidad de Soja, y = cantidad de Garbi, z = cantidad de Burgi, todos expresados en toneladas.

Observemos que debe ser $x \geq 0$, $y \geq 0$ y $z \geq 0$.

Supongamos que estamos en la opción I y hagamos una ecuación para cada restricción de stock.

¿Cuánto se va a consumir de soja? Si x = cantidad de Soja, como el 50% está compuesto por Soja, se habrán gastado $\frac{50}{100}x$ toneladas de Soja. Observando los datos y procediendo de la misma manera con Garbi y Burgi, la cantidad de Soja insumida es $\frac{50}{100}x + \frac{10}{100}y + \frac{20}{100}z$. Como disponemos de 2 toneladas, si queremos

gastar todo se debe cumplir:

$$\frac{50}{100}x + \frac{10}{100}y + \frac{20}{100}z = 2.$$

Análogamente, las restricciones para Garbanzos y Trigo son, respectivamente:

$$\frac{30}{100}x + \frac{50}{100}y + \frac{20}{100}z = 3$$

$$\frac{20}{100}x + \frac{40}{100}y + \frac{60}{100}z = 5$$

El sistema que debemos resolver es

$$S_I \begin{cases} \frac{50}{100}x + \frac{10}{100}y + \frac{20}{100}z = 2 \\ \frac{30}{100}x + \frac{50}{100}y + \frac{20}{100}z = 3 \\ \frac{20}{100}x + \frac{40}{100}y + \frac{60}{100}z = 5 \end{cases}$$

que claramente es equivalente al sistema:

$$S_I \begin{cases} 5x + y + 2z = 20 \\ 3x + 5y + 2z = 30 \\ 2x + 4y + 6z = 50 \end{cases}$$

Procediendo de la misma manera con las opciones II y III, debemos también resolver los sistemas:

$$S_{II} \begin{cases} 5x + y + 2z = 40 \\ 3x + 5y + 2z = 30 \\ 2x + 4y + 6z = 30 \end{cases} \quad \text{y} \quad S_{III} \begin{cases} 5x + y + 2z = 60 \\ 3x + 5y + 2z = 60 \\ 2x + 4y + 6z = 80 \end{cases}$$

Como las matrices de coeficientes coinciden, podemos hacer resolución simultánea.

Planteamos entonces la gran matriz:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & :20 & :40 & :60 \\ 3 & 5 & 2 & :30 & :30 & :60 \\ 2 & 4 & 6 & :50 & :30 & :80 \end{pmatrix}$$

y empezamos la triangulación haciendo $F_3 \leftarrow \frac{1}{2}F_3$ y despues, $F_3 \leftrightarrow F_1$. Seguimos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & :25 & :15 & :40 \\ 3 & 5 & 2 & :30 & :30 & :60 \\ 5 & 1 & 2 & :20 & :40 & :60 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\substack{F_2 \leftarrow F_2 - 3F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 - 5F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & :25 & :15 & :40 \\ 0 & -1 & -7 & :-45 & :-15 & :-60 \\ 0 & -9 & -13 & :-105 & :-35 & :-140 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\sim]{F_3 \leftarrow F_3 - 9F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & :25 & :15 & :40 \\ 0 & -1 & -7 & :-45 & :-15 & :-60 \\ 0 & 0 & 50 & :300 & :100 & :400 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\substack{F_2 \leftarrow -F_2 \\ F_3 \leftarrow \frac{1}{50}F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & :25 & :15 & :40 \\ 0 & 1 & 7 & :45 & :15 & :60 \\ 0 & 0 & 1 & :6 & :2 & :8 \end{pmatrix}$$

Reconstruimos el sistema para la opción I:
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 25 \\ y + 7z = 45 \\ z = 6 \end{cases}$$
, cuya solución

es: $x = 1, y = 3, z = 6$. En este caso, la respuesta es: para consumir el stock dado, la cantidad de alimentos que debe producirse es:

1 tonelada de Soji, 3 toneladas de Garbi y 6 toneladas de Burgi.

La solución del sistema de la opción II es:

$x = 7$ toneladas de Soji, $y = 1$ tonelada de Garbi y $z = 2$ toneladas de Burgi.

La de la opción III:

$x = 8$ toneladas del primer producto, $y = 4$ toneladas del segundo y $z = 8$ toneladas del tercero

Observemos por último que todos los casos son factibles, pues nos ha dado siempre: $x \geq 0, y \geq 0$ y $z \geq 0$.

2. La Compañía de detergentes DEL SUR fabrica los productos LAV, BRISA, CICLÓN Y PROF a partir de 3 sustancias: As, Sp y Ss. En el cuadro se muestran, en cientos de kg, las cantidades de materia prima necesarias para fabricar 1 envase de cada producto y el stock:

	LAV	BRISA	CICLÓN	PROF	STOCK
As	4	8	4	4	60
Sp	2	5	2	3	36
Ss	3	7	4	3	50

Encontrar el número de envases de cada producto que se pueden fabricar utilizando todo el material disponible.

Solución:

El planteo es similar al del problema anterior, debiéndose poner una ecuación para la restricción de stock correspondiente a cada sustancia: As, Sp y Ss.

Como nos preguntan cantidad de envases, ponemos:

x_1 = cantidad de envases de LAV, x_2 = cantidad de envases de BRISA,
 x_3 = cantidad de envases de CICLÓN, x_4 = cantidad de envases de PROF.

Observemos que ahora los valores permitidos a las variables son: 0,1,2,, n,..... pues son *envases*.

Si tenemos x_1 envases de LAV, y cada uno utiliza 4 (cientos) kg de As, para fabricar LAV usaremos $4x_1$ (cientos) de kg de esta sustancia. Igualmente para cada producto. Entonces, la restricción de stock correspondiente a As es $4x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 60$.

La restricción para Sp es $2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 36$, y para Ss

$3x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 50$.

Debemos entonces resolver el sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 60 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 36 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 50 \end{cases}$$

Planteamos la matriz ampliada y triangulamos, para simplificar ya escribimos la

primera fila "dividida por 4", y seguimos triangulando:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & :15 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & :36 \\ 3 & 7 & 4 & 3 & :50 \end{pmatrix} \xrightarrow[\underbrace{F_3 \leftarrow F_3 - 3F_1}]{\underbrace{F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & :15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & :6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & :5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underbrace{F_3 \leftarrow F_3 - F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & :15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & :6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & :-1 \end{pmatrix}$$

Reconstruimos el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ x_2 + x_4 = 6 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases} .$$

La solución dada paraméricamente es: $X = (4, 6 - x_4, -1 + x_4, x_4)$. Pero ahora, *las variables deben cumplir una condición adicional*: deben ser enteros no negativos. La primera ya lo cumple, pues es "4". Planteamos entonces las restricciones: $6 - x_4 \geq 0$, $-1 + x_4 \geq 0$, $x_4 \geq 0$. Entonces, $6 \geq x_4$, $x_4 \geq 1$, $x_4 \geq 0$. Los posibles valores de x_4 son: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Para cada uno de éstos, tendremos una respuesta posible, considerando que $X = (4, 6 - x_4, -1 + x_4, x_4)$. Podemos hacer una tabla, calculando X para cada valor de x_4 .

x_4	$(4, 6 - x_4, -1 + x_4, x_4)$
1	(4, 5, 0, 1)
2	(4, 4, 1, 2)
3	(4, 3, 2, 3)
4	(4, 2, 3, 4)
5	(4, 1, 4, 5)
6	(4, 0, 5, 6)

La respuesta es entonces: hay 6 maneras de satisfacer lo pedido. La primera es fabricando 4 envases de LAV, 5 de BRISA, ninguno de CICLÓN y 1 de PROF. Las otras maneras de satisfacer lo pedido se obtienen interpretando cada renglón de la tabla dada.

Pivotes

(Este ítem se puede saltar ahora, pero es conveniente leerlo antes de estudiar el método símplex.)

El método del pivote es una variante del método ya visto de triangulación. La idea es trabajar un poco más con las matrices y un poco menos con las ecuaciones. Se harán operaciones elementales entre las filas, haciendo "1" algunos coeficientes -de manera de no repetir fila y columna-, y "0" en toda los coeficientes que están por arriba y por abajo de donde tenemos cada "1".

Ejemplo

Resolver, mediante el método de pivote, el sistema:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_5 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 4x_4 + 8x_5 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 8x_5 = 0 \\ 7x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Planteamos la matriz asociada. Como el sistema es homogéneo, no hace falta trabajar con la matriz ampliada.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & -5 & 4 & 8 \\ 5 & 2 & 5 & 4 & -8 \\ 7 & 0 & -2 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $a_{44} = 1$. Queremos que todos los coeficientes que están por arriba de a_{44} sean "0". Por esto, hacemos $F_2 \leftarrow F_2 - 4F_4$ y $F_3 \leftarrow F_3 - 4F_4$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 & 2 \\ -31 & 4 & 3 & 0 & 8 \\ -23 & 2 & 13 & 0 & -8 \\ 7 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elegimos como pivote a_{11} , por eso hacemos $F_1 \leftarrow -F_1$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 3 & 0 & -2 \\ -31 & 4 & 3 & 0 & 8 \\ -23 & 2 & 13 & 0 & -8 \\ 7 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pivoteamos: $F_2 \leftarrow F_2 + 31F_1$, $F_3 \leftarrow F_3 + 23F_1$, $F_4 \leftarrow F_4 - 7F_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -58 & 96 & 0 & -54 \\ 0 & -44 & 82 & 0 & -54 \\ 0 & 14 & -23 & 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

Elijo ahora como pivote a_{25} , dividimos entonces la fila 2 por -54:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & \frac{29}{27} & -\frac{16}{9} & 0 & \boxed{1} \\ 0 & -44 & 82 & 0 & -54 \\ 0 & 14 & -23 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

Hacemos ahora: $F_1 \leftarrow F_1 + 2F_2$, $F_3 \leftarrow F_3 + 54F_2$, $F_4 \leftarrow F_4 - 14F_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{27} & -\frac{5}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{29}{27} & -\frac{16}{9} & 0 & 1 \\ 0 & 14 & -14 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{28}{27} & \frac{17}{9} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Falta elegir un pivote en la fila 3, pudiendo ser a_{32} o a_{33} . Tomemos por ejemplo a_{32} .

Dividimos entonces la fila 3 por "14":

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{27} & -\frac{5}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{29}{27} & -\frac{16}{9} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{28}{27} & \frac{17}{9} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por último hacemos: $F_1 \leftarrow F_1 - \frac{4}{27}F_3$, $F_2 \leftarrow F_2 - \frac{29}{27}F_3$ y $F_4 \leftarrow F_4 + \frac{28}{27}F_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{27} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{27} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{23}{27} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Reconstruimos el sistema:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{11}{27}x_3 = 0 \\ -\frac{19}{27}x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ \frac{23}{27}x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

La idea de este método es despejar, en cada ecuación, la variable que tiene coeficiente 1, y que sólo aparece en esa ecuación. En este caso, nos queda todo en función de x_3 :

$$x_1 = \frac{11}{27}x_3, x_5 = \frac{19}{27}x_3, x_2 = x_3 \text{ y } x_4 = -\frac{23}{27}x_3.$$

La solución paramétrica es $X = (\frac{11}{27}x_3, x_3, x_3, -\frac{23}{27}x_3, \frac{19}{27}x_3) = x_3(\frac{11}{27}, 1, 1, -\frac{23}{27}, \frac{19}{27})$.

Pero si observamos que $(\frac{11}{27}, 1, 1, -\frac{23}{27}, \frac{19}{27}) = \frac{1}{27}(11, 27, 27, -23, 19)$, podemos escribir a la solución del sistema de manera más sencilla:

$$\boxed{X = \alpha(11, 27, 27, -23, 19)}.$$

Ejercicios

1. Resolver el sistema cuya matriz ampliada es
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & :2 \\ 2 & -4 & 0 & 3 & :3 \\ -1 & 4 & 1 & -2 & :0 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & :3 \end{array} \right).$$

Elegimos como pivote a_{11} , ya que $a_{11} = 1$ -y además ya tenemos un "0" en esa columna. Haciendo: $F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$ y $F_3 \leftarrow F_3 + F_1$ obtenemos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & :2 \\ 0 & -8 & -2 & -1 & :-1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & :2 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & :3 \end{array} \right).$$

Hacemos ahora $F_4 \leftarrow F_4 - F_3$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & :2 \\ 0 & -8 & -2 & -1 & :-1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & :2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & :1 \end{array} \right)$$

y no seguimos más porque el sistema asociado a esta matriz es incompatible.

2. Resolver el sistema cuya matriz ampliada es
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & :3 \\ 4 & -2 & -2 & :2 \\ 3 & 2 & -1 & :-2 \end{array} \right)$$

Elijamos por ejemplo a_{12} como pivote, ya que $a_{12} = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \boxed{1} & 1 & :3 \\ 4 & -2 & -2 & :2 \\ 3 & 2 & -1 & :-2 \end{array} \right) \xrightarrow[\underbrace{F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1}]{\underbrace{F_2 \leftarrow F_2 + 2F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & :3 \\ 8 & 0 & 0 & :8 \\ -1 & 0 & -3 & :-8 \end{array} \right).$$

Dividimos la segunda fila por "2" y elegimos a_{21} como pivote. Es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & :3 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & :1 \\ -1 & 0 & -3 & :-8 \end{array} \right) \xrightarrow[\underbrace{F_3 \leftarrow F_3 + F_2}]{\underbrace{F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & :1 \\ 1 & 0 & 0 & :1 \\ 0 & 0 & -3 & :-7 \end{array} \right).$$

El único pivote posible es a_{33} . Dividimos entonces la fila 3 por "-3":

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & :1 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & :1 \\ 0 & 0 & 1 & : \frac{7}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & : -\frac{4}{3} \\ 1 & 0 & 0 & : 1 \\ 0 & 0 & 1 & : \frac{7}{3} \end{array} \right).$$

La solución del sistema es el punto: $X = (1, -\frac{4}{3}, \frac{7}{3})$.