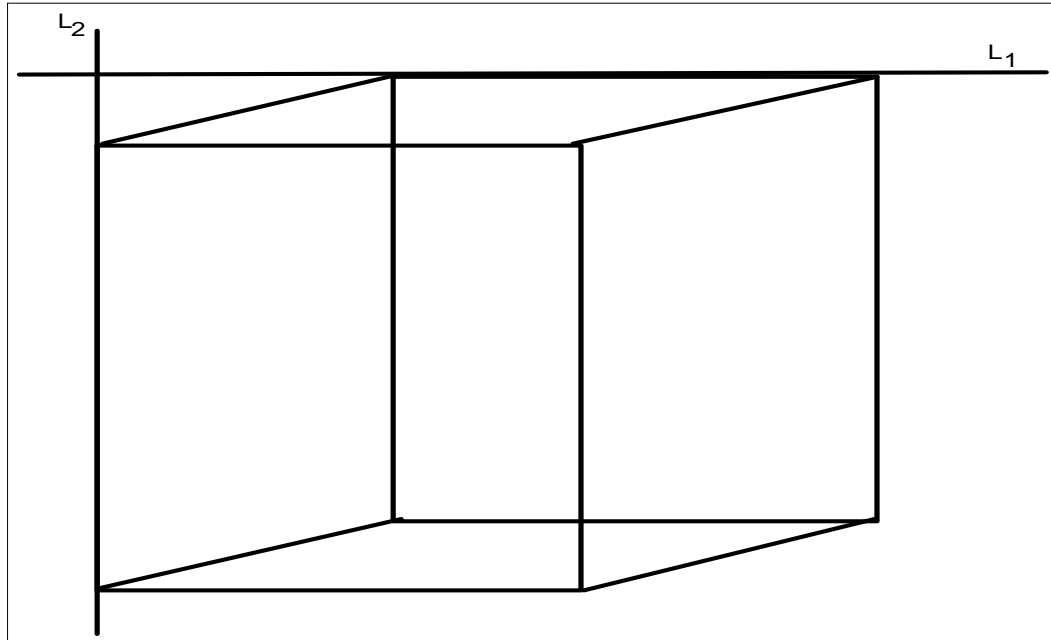


# Apuntes de álgebra (Olga) Cátedra Fauring

*Estos apuntes se iniciaron durante el primer cuatrimestre de 2005, en base a las guías docentes de la materia y a las clases de la profesora Olga Ambas. Colaboraron con la corrección de los errores los profesores: Adriana Nuñez, Jorge Riú, Valeria Amado y Mariano Franco. La presente es una actualización hecha en el inicio del primer cuatrimestre de 2012, en las que se agregaron numerosas correcciones de la profesora Susana Puddu.*

*Este apunte no pretende reemplazar las clases de los docentes, sino sólo facilitarles el material a los alumnos en caso de que no puedan concurrir a las clases, y permitirles otra lectura con algunos ejercicios adicionales.*

*En caso de detectar errores, se agradece comunicarlo a [oambas@hotmail.com](mailto:oambas@hotmail.com). Al enviar el mail, poner en "asunto": APUNTE. De esta manera, será posible seguir corrigiendo el material para futuras ediciones.*





# PRÁCTICA 1

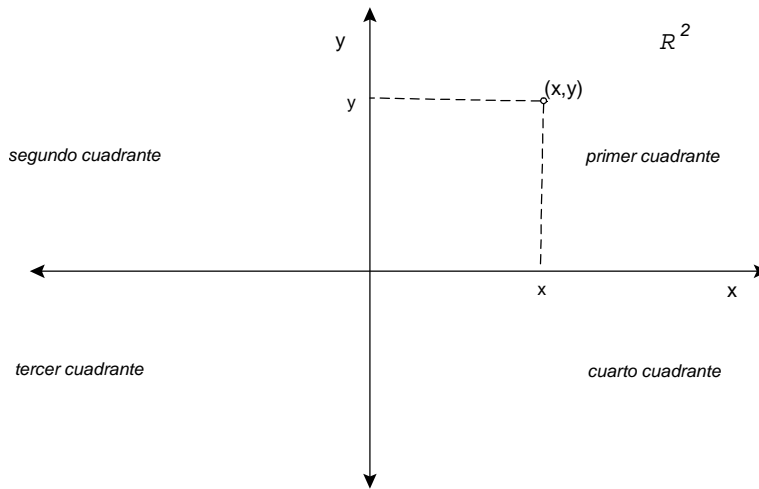
$R^2$

## Plano y puntos del plano.

Para representar pares de números, usaremos un "sistema de coordenadas ortogonal": dos rectas que se cortan en ángulo recto. Si  $R$  es el conjunto de números reales, pongamos

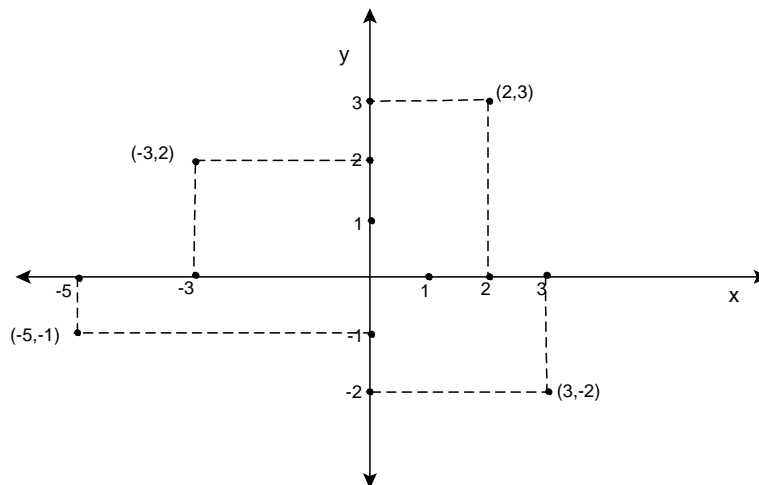
$$R^2 = \{(x,y) : x \in R, y \in R\}$$

cuya representación geométrica es:



Los elementos de  $R^2$  se llaman *puntos del plano*, siendo  $x$  la *primera coordenada* o *abscisa*, e  $y$  la *segunda coordenada* u *ordenada*. El eje horizontal se llama *eje x*, el vertical se llama *eje y*, y la intersección de ambos ejes se llama *origen*.

## Ejemplos de puntos:



Observemos que, aunque no es obligatorio, hemos elegido la misma escala en ambos ejes.

¿Qué distingue a cada cuadrante? El signo de las coordenadas,

siendo: 

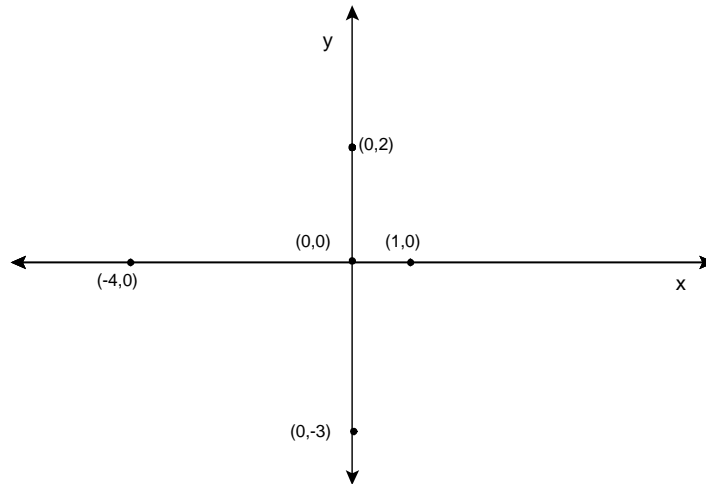
1er cuadrante: $x > 0, y > 0$	2do cuadrante: $x < 0, y > 0$
3er cuadrante: $x < 0, y < 0$	4to cuadrante: $x > 0, y < 0$

Los puntos en los ejes son de la forma: 

$(x, 0)$ en el eje $x$
$(0, y)$ en el eje $y$

,

la intersección de ambos es el origen  $O = (0, 0)$ .

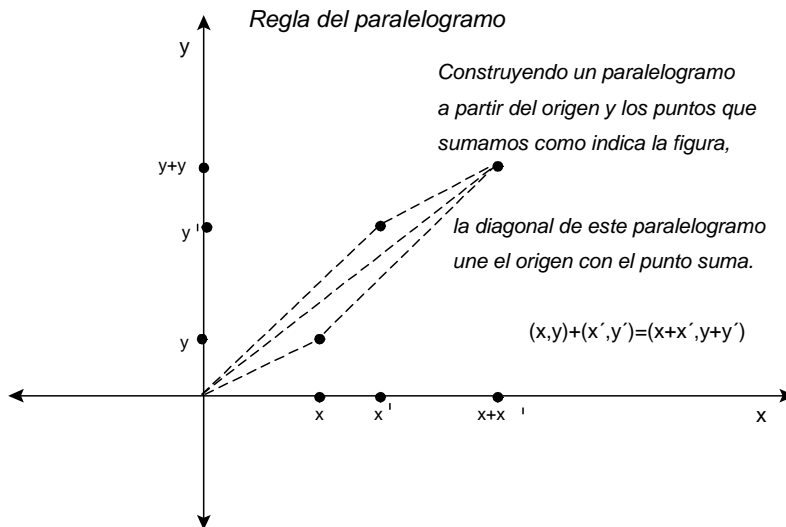


## Operaciones entre puntos. Ecuación paramétrica de una recta.

### Suma

Los puntos del plano se pueden *sumar*:

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$



### Ejemplos

1.  $(1,2) + (3,5) = (4,7)$
2.  $(1,-2) + (-3,5) = (-2,3)$
3.  $(-1,2) + (-3,5) = (-4,7)$
4.  $(1,2) + (-1,5) = (0,7)$
5.  $(1,2) + (-1,-2) = (0,0)$ .

Como ejercicio, se recomienda hacer los dibujos correspondientes de 1 y 5.

### Producto por escalares

También se pueden *multiplicar por escalares* -esto es, por un número real:

$$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$$

### Ejemplo

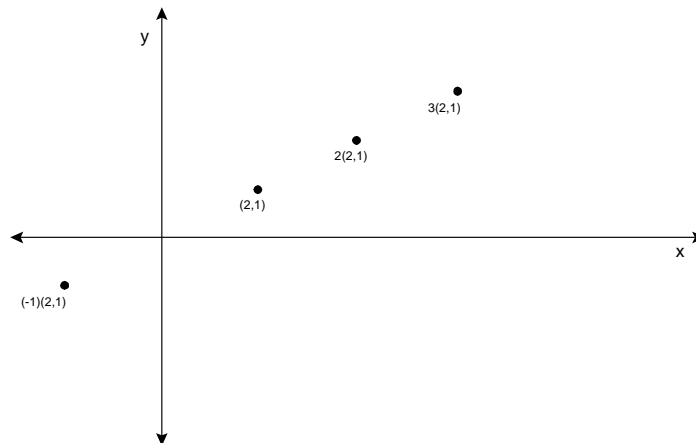
Multipliquemos al punto  $(2,1)$  por distintos escalares:

$$2(2,1) = (4,2)$$

$$3(2,1) = (6,3)$$

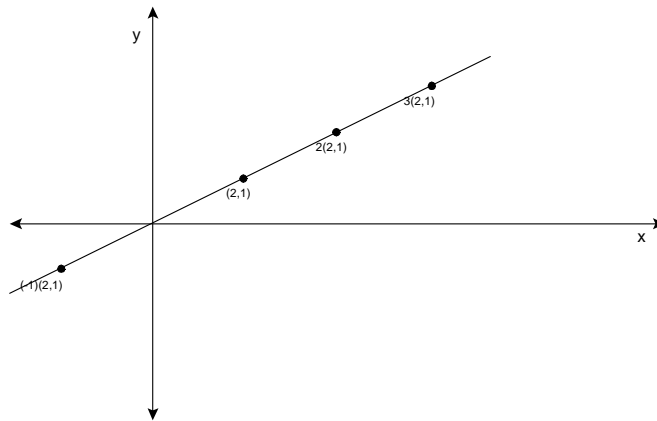
$$(-1)(2,1) = (-2,-1).$$

Grafiquemos los puntos obtenidos:



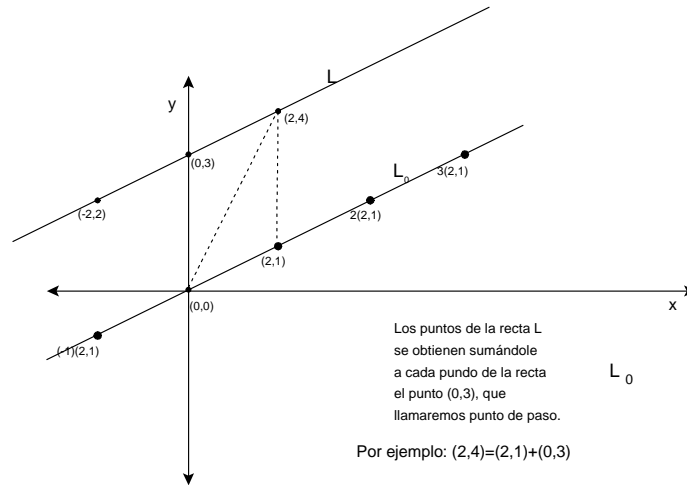
Vemos que todos estos puntos están alineados.

En general:  $\alpha(x_0, y_0)$  es una recta que pasa por el origen y el punto del plano  $(x_0, y_0)$ .



El vector  $(-x_0, -y_0)$  se llama *opuesto* al vector  $(x, y)$ . Además, pondremos  $-(x, y)$  en lugar de  $(-1)(x, y)$ .

Con  $X$  notaremos puntos de  $R^2$ , esto es,  $X = (x, y)$ . Consideremos ahora la recta  $L_0 : (2, 1)$  y a cada punto de la misma sumémosle el punto  $(0, 3)$ . Como cada punto de la recta es de la forma  $\alpha(2, 1)$ , al sumar  $(0, 3)$  obtenemos obviamente el punto  $\alpha(2, 1) + (0, 3)$ . Gráficamente:



Si le sumamos a cada uno de los puntos de una recta  $L_0$  que pasa por el origen un punto fijo, obtenemos -aplicando la regla del paralelogramo- una recta  $L$  con la misma dirección de la primera, que pasa ahora por el punto que hemos sumado.

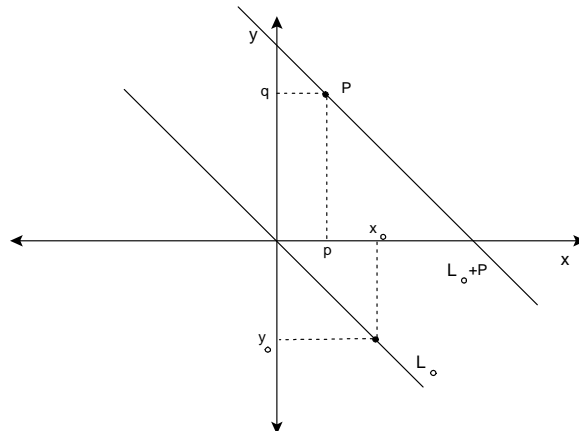
En este caso, la recta que pasa por el origen es  $\alpha(2, 1)$ . El punto  $(2, 1)$  se llama *vector dirección* de  $L$  y  $(0, 3)$  es un *punto de paso*.

Observemos que si ponemos  $(4, 2)$  en lugar de  $(2, 1)$  -o cualquier punto  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$  de  $L_0$ - y  $(2, 4)$  -o cualquier otro punto de  $L$ - hubiéramos obtenido la misma recta.

En general, si  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ , la ecuación

$$X = \alpha(x_0, y_0) + (p, q)$$

se llama *ecuación paramétrica* de  $L$ ,  $(x_0, y_0)$  es un *vector dirección* y  $(p, q)$  un *punto de paso*. Para cada valor del parámetro obtenemos un punto de la recta.



Para graficar, podemos construir una tabla del tipo

$\alpha$	$(x, y)$
...	...
...	...

Por ejemplo, en el caso de  $L : \alpha(2, 1) + (0, 3)$ , obtenemos:

$\alpha$	$(x, y)$
0	(0, 3)
1	(2, 4)

Vamos a ver ahora otra forma de escribir una recta, sin usar parámetro.

## Ecuaciones implícita y explícita de una recta.

Consideremos la recta

$$L : X = \alpha(2, 1) + (0, 3)$$

Si  $(x, y)$  es un punto de la recta  $L$ , es

$$(x, y) = \alpha(2, 1) + (0, 3)$$

Pero para que dos puntos del plano sean iguales, deben ser iguales coordenada a coordenada.

Esa igualdad es equivalente a que se cumplan las dos igualdades siguientes: 
$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha + 3 \end{cases}$$

Despejando el parámetro de la primera ecuación, tenemos que  $\alpha = \frac{1}{2}x$ . Reemplazando en la segunda obtenemos que  $y = \frac{1}{2}x + 3$ , de donde  $-\frac{1}{2}x + y = 3$ . Esta es la *ecuación implícita* de  $L$ .

En general, si  $A, B$  y  $C$  son números reales con  $A \neq 0$  o  $B \neq 0$  entonces  $Ax + By = C$  es la ecuación implícita de una recta.

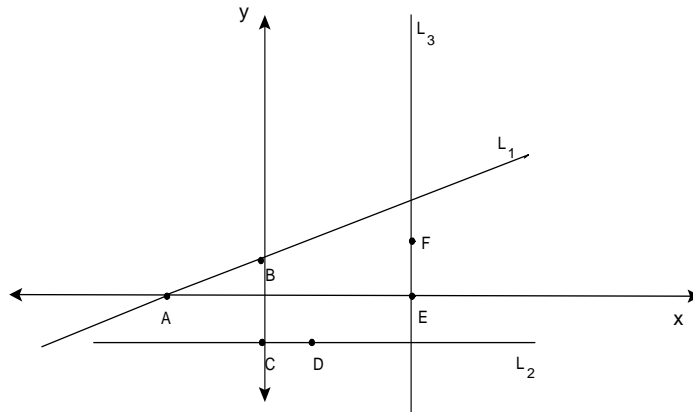
### Ejemplos:

Graficar las rectas cuyas ecuaciones implícitas son, respectivamente:

1.  $L_1 : -x + 3y = 2$
2.  $L_2 : 5y = -4$
3.  $L_3 : -x = -3$

Observemos que como sabemos que los puntos que satisfacen cada una de las ecuaciones están en una recta, en cada caso *bastará con encontrar dos puntos*.

1. Para  $L_1$ : veamos las intersecciones de la recta con los ejes: si  $x = 0$ , tenemos que  $y = \frac{2}{3}$ ; si  $y = 0$  entonces  $x = -2$ . Tenemos entonces que los puntos  $A = (0, \frac{2}{3}) \in L_1$  y  $B = (-2, 0) \in L_1$ .
2. Para  $L_2$ : es, cualquiera sea el valor de  $x$ ,  $y = -\frac{4}{5}$ . Por ejemplo, los puntos  $C = (0, -\frac{4}{5})$  y  $D = (1, -\frac{4}{5})$  son puntos de  $L_2$ .  $L_2$  es una *recta horizontal*.
3. Para  $L_3$ : es, cualquiera sea el valor de  $y$ ,  $x = 3$ . Los puntos  $E = (3, 0)$  y  $F = (3, 1)$  están en  $L_3$ .  $L_3$  es una *recta vertical*.



Observemos que si tenemos en general una ecuación implícita  $Ax + By = C$  en la cual  $B \neq 0$ , vamos a poder despejar la variable  $y$ . Este es, por ejemplo, el caso de  $L_4 : -3x + y = 2$ ; si despejamos  $y$  obtenemos:  $y = 3x + 2$ . Esta es la *ecuación explícita* de  $L_4$ .

En general, la *ecuación explícita de una recta* es de la forma  $y = mx + b$ , donde  $m$  y  $b$  son números reales.  $m$  se llama *pendiente* de la recta y  $b$  *ordenada al origen*.

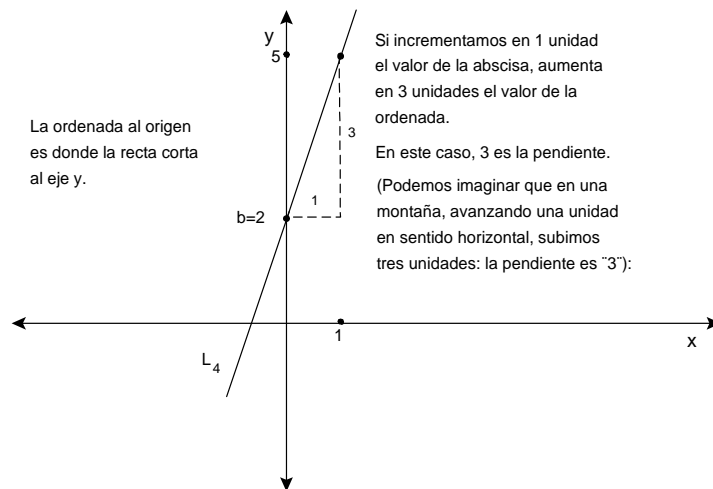
**Ejemplo:**

Graficar  $L_4 : y = 3x + 2$ .

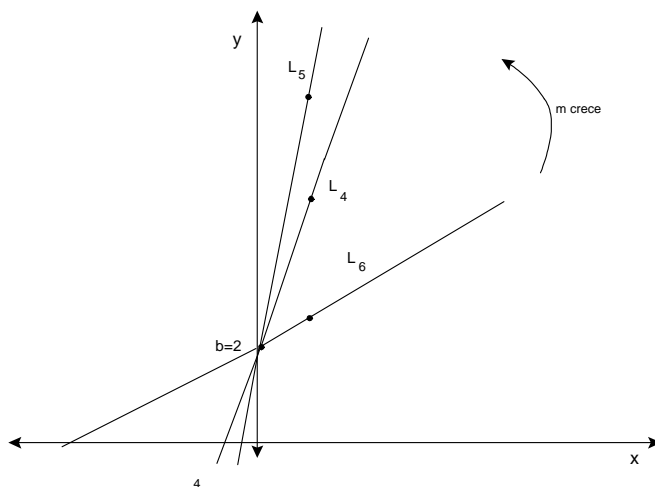
Como antes, podemos ayudarnos con una tabla. La diferencia es que ahora, en lugar de darle valores al parámetro para obtener un punto de la recta, le damos valores a  $x$  y obtenemos los

correspondientes valores de  $y$ :

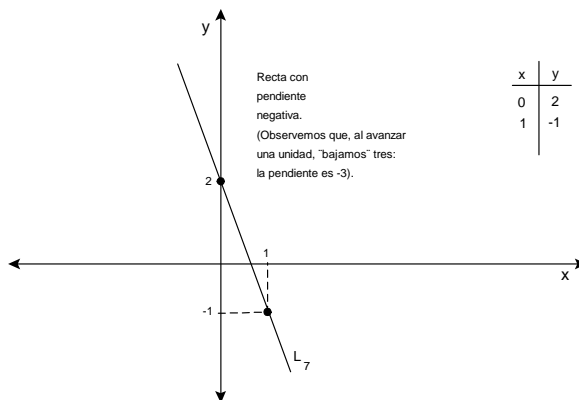
x	y
0	2
1	5



Ahora comparemos rectas con distintas pendientes. Para esto, vamos a graficar  $L_4 : y = 3x + 2$ ,  $L_5 : y = 5x + 2$ ,  $L_6 : y = \frac{1}{2}x + 2$ .



Ahora, grafiquemos  $L_7 : y = -3x + 2$ , recta cuya pendiente es negativa.



(Si la pendiente es negativa, podemos imaginar que, en lugar de subir una montaña, estamos bajando.)

**Dados dos puntos, hallar la ecuación explícita de la recta que pasa por ambos.**

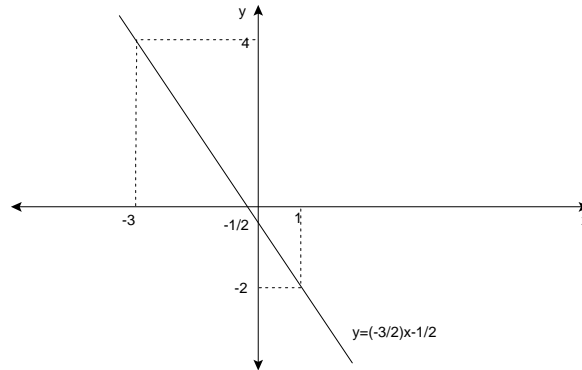
- Supongamos que queremos hallar la ecuación explícita de la recta  $L_8$  que pasa por los puntos  $P = (1, -2)$  y  $Q = (-3, 4)$ . Como los puntos tienen distinta abscisa, la recta que pasa por ambos no es vertical, luego, tiene ecuación explícita:  $y = mx + b$ . Como  $P$  y  $Q$  son puntos de la recta, se deben verificar las ecuaciones:

$$\begin{cases} -2 = m \cdot 1 + b \\ 4 = m \cdot (-3) + b \end{cases}$$

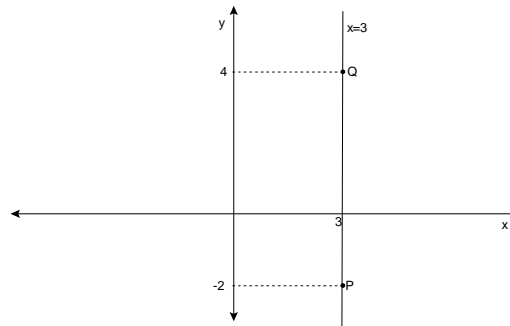
Restando miembro a miembro, logramos eliminar  $b$ , obteniendo:  $-6 = 4m$ .

Entonces,  $m = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$ . Ahora reemplazamos el valor obtenido en cualquiera de las dos ecuaciones. Eliendo la primera tenemos que:  $-2 = \left(-\frac{3}{2}\right)1 + b$ , de donde  $b = -2 + \frac{3}{2} =$

$-\frac{1}{2}$ . Entonces, la recta que pasa por  $P$  y  $Q$  tiene ecuación:  $L_8 : y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ .



2. Si los puntos tienen la misma abscisa, la recta que pasa por ambos es vertical, y no tiene ecuación explícita. Por ejemplo, si  $P = (3, -2)$  y  $Q = (3, 4)$ , la ecuación de la recta que pasa por ambos es  $x = 3$ .



### Dada la ecuación explícita, hallar la ecuación paramétrica.

Supongamos que queremos hallar la ecuación paramétrica de

$$L_8 : y = \left(-\frac{3}{2}\right)x - \frac{1}{2}$$

Si un punto está en esta recta, entonces es de la forma  $(x, -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2})$ .

Observemos que:

$(x, -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}) = (x, -\frac{3}{2}x) + (0, -\frac{1}{2}) = x(1, -\frac{3}{2}) + (0, -\frac{1}{2})$ . Luego, la ecuación paramétrica de  $L_8$  es

$$X = x(1, -\frac{3}{2}) + (0, -\frac{1}{2})$$

donde  $(1, -\frac{3}{2})$  es el vector dirección y  $(0, -\frac{1}{2})$  es un punto de paso.

Observemos que en general, si

$$L : y = mx + b,$$

entonces un punto de  $L$  es de la forma  $(x, mx + b)$ . Y como

$$(x, mx + b) = (x, mx) + (0, b) = x(1, m) + (0, b)$$

obtenemos la siguiente *ecuación paramétrica de  $L$*  :

$$X = x(1, m) + (0, b).$$

Observemos que si  $L : y = mx + b$ , entonces  $(1, m)$  es un vector dirección y  $(0, b)$  es un punto de paso.

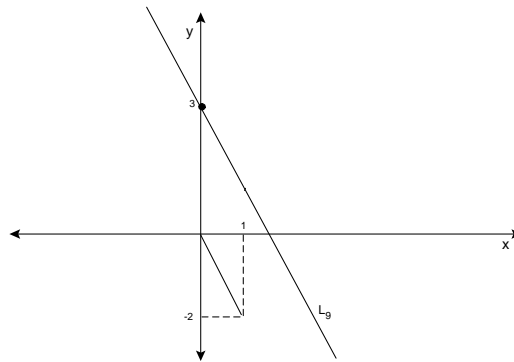
### Ejemplo:

Dada la recta  $L_9 : 2x + y = 3$ , queremos hallar una ecuación paramétrica de esta recta. Por lo visto recién, es inmediato hallar la ecuación paramétrica a partir de la explícita.

Entonces, despejamos  $y = -2x + 3$ . En este caso es  $m = -2$  y  $b = 3$ , obteniendo

$$X = x(1, -2) + (0, 3)$$
 la ecuación paramétrica buscada.

Si no recordamos la forma general, observamos que si  $X = (x, y)$  es un punto de  $L_9$ , entonces, como  $y = -2x + 3$ , resulta  $X = (x, -2x + 3) = (x, -2x) + (0, 3) = x(1, -2) + (0, 3)$ .



## Rectas paralelas

### Ejemplos

Graficar, escribir en forma explícita y determinar la pendiente de las siguientes rectas:

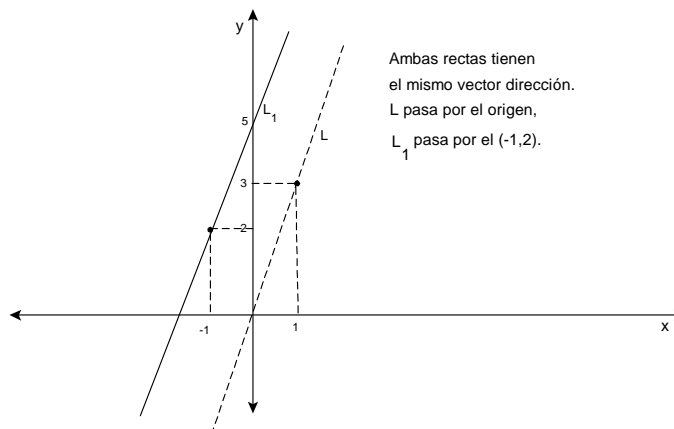
$$L_1 : X = \alpha(1, 3) + (-1, 2),$$

$$L_2 : X = \beta(2, 6) + (2, -1),$$

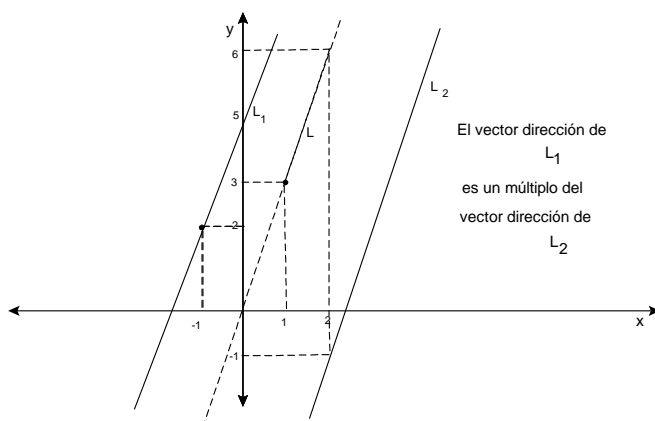
$$L_3 : X = \gamma(3, -2) + (0, 2),$$

$$L_4 : X = \delta(-1, -4) + (1, 3).$$

Grafiquemos primero  $L_1$ . Para esto, consideremos la recta auxiliar  $L : X = \alpha(1, 3)$ , y después a cada punto de  $L$  le sumamos el punto de paso  $(-1, 2)$ .



Agreguemos ahora  $L_2 : X = \beta(2, 6) + (2, -1)$ .



Escribamos  $L_1$  en forma explícita: si

$$(x, y) = \alpha(1, 3) + (-1, 2)$$

entonces

$$\begin{cases} x = \alpha - 1 \\ y = 3\alpha + 2 \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos  $\alpha = x + 1$ .

Reemplazamos en la segunda el valor de  $\alpha$  obtenido y obtenemos que  $y = 3(x + 1) + 2$ , de donde la ecuación explícita de  $L_1$  es  $L_1 : y = 3x + 5$ .

Hacemos lo mismo para el caso de  $L_2$ : si

$$(x, y) = \beta(2, 6) + (2, -1)$$

entonces

$$\begin{cases} x = 2\beta + 2 \\ y = 6\beta - 1 \end{cases}$$

De la primera obtenemos  $\beta = \frac{x-2}{2} = \frac{1}{2}x - 1$ . Reemplazamos en la segunda ecuación:  $y = 6(\frac{1}{2}x - 1) - 1$ . Ahora la ecuación explícita es  $L_2 : y = 3x - 7$ .

**Definición:** dos rectas son *paralelas* si tienen *igual pendiente* o si ambas son *rectas verticales*.

Observemos que si dos rectas están dadas en forma paramétrica, *son paralelas si el vector dirección de una es múltiplo del vector dirección de la otra*.

Entonces, para ver si dos rectas son paralelas, si están dadas en forma explícita: comparamos sus pendientes. Si están dadas en forma paramétrica: comparamos sus vectores dirección.

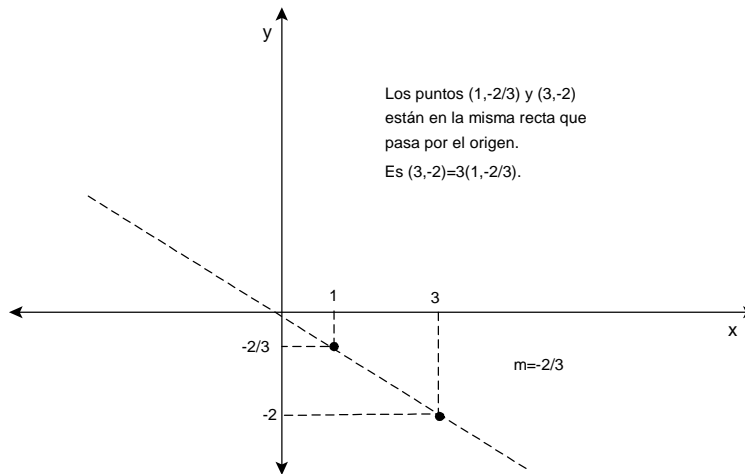
Por ejemplo, como  $(2, 6) = 2(1, 3)$ , las rectas  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas.

Grafiquemos ahora  $L_3 : X = \gamma(3, -2) + (0, 2)$ .

Observemos que  $(3, -2) = 3(1, \frac{-2}{3})$ , de donde el vector  $(1, \frac{-2}{3})$  nos da la misma dirección que  $(3, -2)$ . Entonces, se puede poner:  $L_3 : X = \gamma(1, \frac{-2}{3}) + (0, 2)$ . Pero entonces la pendiente es  $m = \frac{-2}{3}$ . -ver final de la clase 1. Además, vemos que la ordenada al origen es

$b = 2$ , de donde la ecuación explícita es  $L_3 : y = -\frac{2}{3}x + 2$ .

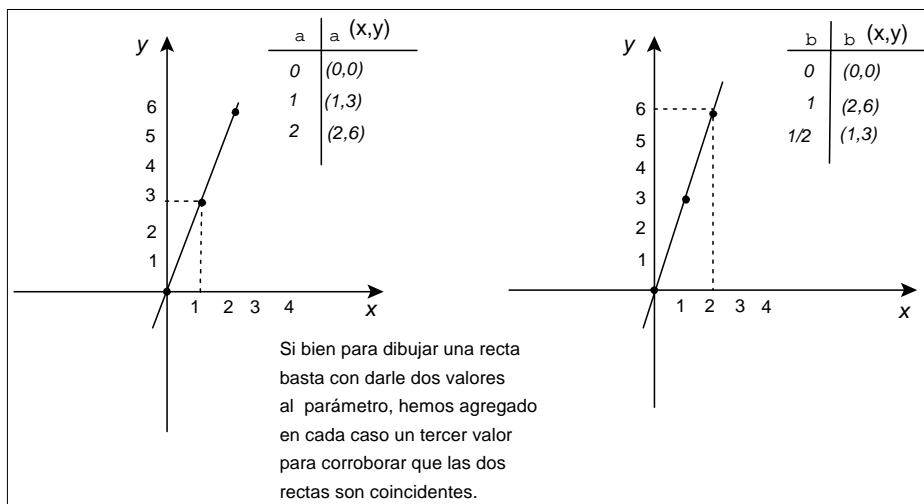
En general, si el vector dirección es  $(a, b)$ , con  $a \neq 0$ , entonces  $(a, b) = a(1, \frac{b}{a})$  y  $m = \frac{b}{a}$ .



Busquemos ahora la ecuación explícita de  $L_4 : X = \delta(-1, -4) + (1, 3)$ .  
 Observamos que la pendiente es  $m = \frac{-4}{-1} = 4$ . Ponemos entonces:  $y = 4x + b$ .  
 Para hallar  $b$ , usamos el punto de paso  $(1, 3)$ :  $3 = 4 \cdot 1 + b$ , de donde obtenemos  $b = -1$ .  
 Es entonces  $L_4 : y = 4x - 1$ . Queda hacer el gráfico como ejercicio.

**Observación:**

Según nuestra definición, sabemos que  $L_1 : X = \alpha(1, 3)$  y  $L_2 : X = \beta(2, 6)$  son rectas paralelas ya que  $(2, 6) = 2(1, 3)$ , esto es, el vector dirección de una es un múltiplo del vector dirección de la otra. (Observar también que  $(1, 3) = \frac{1}{2}(2, 6)$ ) En este caso, como son rectas que pasan por el origen, al ser paralelas, son coincidentes. Grafiquemos.



Si recordamos la interpretación que le habíamos dado a la pendiente, veamos que, en el primer caso, si los puntos hallados inicialmente son  $(0, 0)$  y  $(1, 3)$ , podemos ver que al incrementar una unidad la primera coordenada, la segunda se incremento en tres. En el segundo, si los puntos hallados inicialmente son  $(0, 0)$  y  $(2, 6)$ , ahora, al incrementar dos

unidades la primera coordenada, la segunda se incremento en seis. *Mantuvimos la proporción:*  $\frac{3}{1} = \frac{6}{2}$  (= *pendiente*). Recordando que los vectores dirección son, respectivamente,  $(1, 3)$  y  $(2, 6)$ , y la pendiente es  $\frac{3}{1}$  (=  $\frac{6}{2}$ ), podemos suponer que si  $L_3 : X = \alpha(a, b)$  es paralela a las anteriores, entonces  $\frac{b}{a} = 3$ . Efectivamente:  $X = \alpha(a, b) = \alpha a(1, \frac{b}{a}) = \alpha'(1, \frac{b}{a})$ , de donde  $m = \frac{b}{a}$ .

Si hubiéramos partido de rectas con vector dirección  $(0, b)$ , no podríamos tomar el cociente  $\frac{b}{a}$ , estas rectas no tienen pendiente. Pero es fácil ver el paralelismo: son todas paralelas entre sí, pues son todas rectas verticales.

## Ejercicios

- Hallar una paralela a  $L : y = 2x + 4$ 
  - que pase por  $A = (0, 2)$ ,
  - que pase por  $B = (1, -5)$ .
- Dar la forma paramétrica de la ecuación de una recta paralela a  $L : X = \alpha(-5, 2) + (1, 0)$ 
  - que pase por  $(0, 0)$ ,
  - que pase por  $(-1, -3)$ .

## Resolvemos:

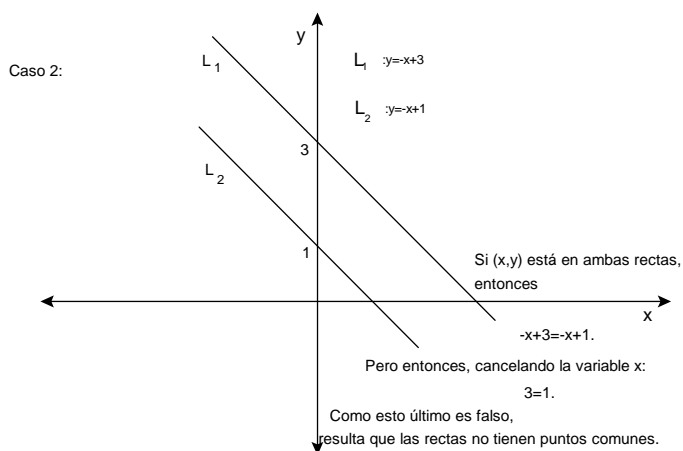
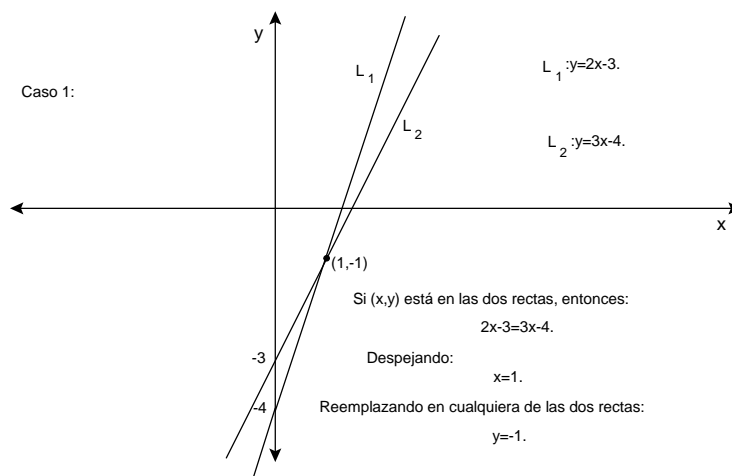
- Las rectas buscadas son paralelas a la dada, luego, todas tienen la misma pendiente  $m = 2$ .
  - En este caso, la ordenada al origen es dato, siendo  $b = 2$ .  
La recta buscada es  $y = 2x + 2$ .
  - Pongamos  $y = 2x + b$ . Como  $B$  es un punto de la recta, se debe verificar que  $-5 = 2 \cdot 1 + b$ .  
Despejando obtenemos que  $b = -7$ .  
La respuesta ahora es  $y = 2x - 7$ .
- Trabajamos ahora en forma paramétrica, por ser las rectas buscadas paralelas a la dada deben tener como vector dirección un múltiplo del punto  $(-5, 2)$ . Podemos tomar directamente este punto como vector dirección de ambas rectas.
  - Si ponemos  $X = \beta(-5, 2)$ , esta recta cumple lo pedido: si  $\beta = 0$ ,  $X = (0, 0)$ , luego, pasa por el origen.
  - Tomamos como punto de paso a  $(-1, -3)$ . La recta buscada es:  
 $L : X = \alpha(-5, 2) + (-1, -3)$ .

## Intersección de rectas

Si tenemos dos rectas *distintas* en el plano, puede pasar que:

- se corten en un sólo punto
  - sean paralelas, por lo que no van a tener puntos en común.
- Observemos además que dos rectas que tienen más de un punto en común, son la misma recta, y en este caso, también son paralelas.

Gráficamente:



## Ejercicios

Calcular las intersecciones de  $L_1$  y  $L_2$  en cada caso. Los gráficos quedan como ejercicio.

- $L_1 : x + 4y = 2$                        $L_2 : 2x + 8y = 4$
- $L_1 : x + 4y = 2$                        $L_2 : 2x + 8y = 0$
- $L_1 : x + 4y = 2$                        $L_2 : x + y = 0$
- $L_1 : 2x - 3y = -1$                      $L_2 : X = \alpha(1, -3) + (2, 2)$
- $L_1 : -x + 3y = 1$                        $L_2 : X = \beta(3, 1) + (1, 1)$
- $L_1 : X = \alpha(1, -3) + (2, -2)$        $L_2 : X = \beta(3, 1) + (-2, 0)$

### Soluciones:

- Despejando  $y$  en cada una de las rectas, obtenemos:  $L_1 : y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ ,  $L_2 : y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ .

Entonces,  $L_1$  y  $L_2$  son rectas coincidentes.

- Procediendo de la misma manera que en el caso anterior, obtenemos:  $L_1 : y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ ,  $L_2 : y = -\frac{1}{4}x$ . Estamos ahora en el caso de rectas paralelas no coincidentes:

$L_1$  y  $L_2$  no tienen ningún punto en común.

**Observación:** Si  $Ax + By = C$  es la ecuación implícita de una recta, y  $B \neq 0$ , entonces al despejar la variable  $y$  nos queda:  $y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$ , de donde  $m = -\frac{A}{B}$ .

Directamente, en este ejemplo y en el anterior, las rectas son paralelas porque  $\frac{4}{1} = \frac{8}{2}$ .

La diferencia entre los dos casos está dada por el término constante: en el caso anterior, vemos que *la segunda ecuación implícita se obtiene de la primera multiplicando a ambos miembros por 2*, de donde *tienen el mismo conjunto de soluciones*.

En el segundo caso, multiplicamos por 2 *todos los coeficientes del primer miembro, pero no el término constante*: éste será el caso de *paralelas no coincidentes*.

3. Despejamos  $x$  en ambas ecuaciones, obteniendo ahora:  $L_1 : x = 2 - 4y$ ,  $L_2 : x = -y$ .  
Entonces, si  $(x, y)$  es un punto que está en ambas rectas, debe ser  $2 - 4y = -y$ , de donde  $y = \frac{2}{3}$ .

Como  $x = -y$ , el punto en común es  $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ . Luego,  $L_1 \cap L_2 = \{(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$ .

4. Un punto  $P$  de  $L_2$  es de la forma:  $P = (x, y) = \alpha(1, -3) + (2, 2) = (\alpha + 2, -3\alpha + 2)$ .

Si queremos que este punto esté también en  $L_1$ , se debe satisfacer la ecuación:

$$2(\alpha + 2) - 3(-3\alpha + 2) = -1.$$

Despejando  $\alpha$  obtenemos:  $\alpha = \frac{1}{11}$ .

Reemplazando en la expresión de  $P = (\alpha + 2, -3\alpha + 2)$ , obtenemos que el punto en que se intersecan ambas rectas es:  $P = (\frac{1}{11} + 2, -3\frac{1}{11} + 2)$ .

Entonces, la intersección de ambas rectas es el punto  $P = (\frac{23}{11}, \frac{19}{11})$ .

5. Procedemos de la misma manera que en el caso anterior: un punto  $P$  de  $L_2$  es de la forma:

$$P = (x, y) = \beta(3, 1) + (1, 1) = (3\beta + 1, \beta + 1).$$

Si queremos que también esté en  $L_1$  se debe verificar que  $-(3\beta + 1) + 3(\beta + 1) = 1$ . Pero

entonces  $-3\beta - 1 + 3\beta + 3 = 1$ , de donde  $2 = 1$ . Esto significa que las rectas no se intersecan.

Otra manera de resolver este ejercicio es: comparando las pendientes, vemos que son iguales por lo tanto las rectas son paralelas. Entonces, son coincidentes o no tienen ningún punto en común.

Un punto de  $L_2$  es el  $(1, 1)$ . Verificando que este punto *no* cumple la ecuación implícita de  $L_1$ , llegamos a la conclusión de que no se intersecan.

6. Ahora ambas rectas están dadas paramétricamente. Una manera de resolver el ejercicio es escribir alguna (o las dos) en forma implícita y resolver como en los ejemplos anteriores. Otra posibilidad es hallar directamente la intersección sin reescribirlas:

Si  $X = (x, y)$  es un punto de  $L_1$ , entonces:  $(x, y) = \alpha(1, -3) + (2, -2) = (\alpha + 2, -3\alpha - 2)$ .

Si  $X = (x, y)$  es un punto de  $L_2$ , entonces:  $(x, y) = \beta(3, 1) + (-2, 0) = (3\beta - 2, \beta)$ .

Si el punto está en las dos rectas, debe ser  $(\alpha + 2, -3\alpha - 2) = (3\beta - 2, \beta)$ .

Igualando coordenada a coordenada, obtenemos el sistema de incógnitas  $\alpha$  y  $\beta$ :

$$\begin{cases} \alpha + 2 = 3\beta - 2 \\ -3\alpha - 2 = \beta \end{cases}$$

Resolvemos. Como  $\beta$  está despejada en la segunda ecuación, reemplazamos en la primera:

$\alpha + 2 = 3(-3\alpha - 2) - 2$ , de donde  $\alpha = -1$ . Al tener el valor del parámetro  $\alpha$ , usamos  $L_1$  y obtenemos que  $(x, y) = (-1 + 2, -3(-1) - 2) = (1, 1)$ . Podríamos obtener  $\beta$ :

$\beta = -3(-1) - 2 = 1$ . Utilizando la expresión de  $L_2$ ,  $(x, y) = (3 - 2, 1) = (1, 1)$ , por supuesto el mismo punto. Entonces  $L_1 \cap L_2 = \{(1, 1)\}$ .

**Cuidado!** Si el ejercicio estuviera planteado: calcular la intersección de

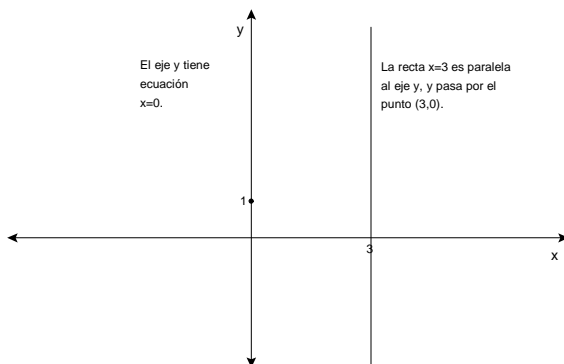
$L_1 : X = \alpha(1, -3) + (2, -2)$  y  $L_2 : X = \alpha(3, 1) + (-2, 0)$ , *lo primero que hay que hacer es "cambiarle el nombre al parámetro de una de las dos rectas"*: Podemos poner

$L_2 : X = \beta(3, 1) + (-2, 0)$ , y recién ahora resolver. Si no hacemos esto, en general **no** vamos a encontrar el punto en común, por ejemplo, en este caso nos dió  $\alpha = -1$  y  $\beta = 1$ : con *distintos* valores de los respectivos parámetros se obtiene el punto buscado.

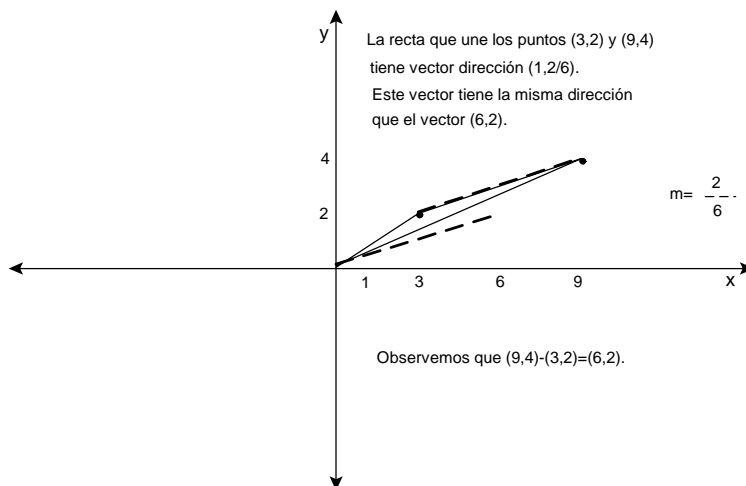
## Dos ejemplos más

1. Pasar a forma paramétrica la recta de ecuación  $L : 2x = 6$ .

Si  $(x, y)$  está en esta recta, debe verificar que  $x = 3$ , luego, es de la forma  $(3, y)$ . Como  $(3, y) = y(0, 1) + (3, 0)$ , la ecuación paramétrica es  $y(0, 1) + (3, 0)$ . Directamente: al ser vertical, podemos tomar como vector dirección el  $(0, 1)$  y como punto de paso se puede poner cualquiera cuya primera coordenada sea 3.



2. Hallar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por  $P = (3, 2)$  y  $Q = (9, 4)$ .



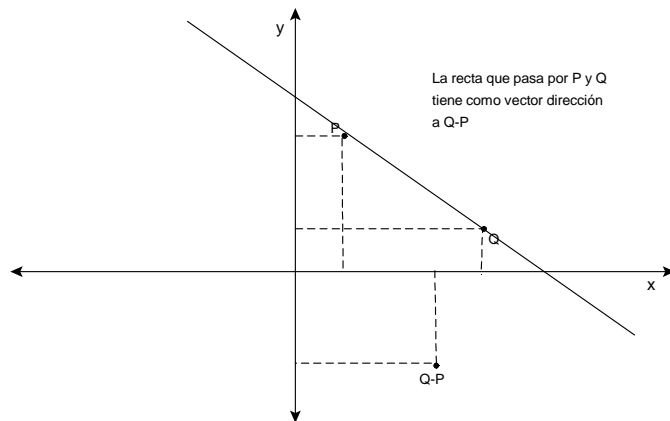
Veamos que, en general, la recta que pasa por  $P = (a, b)$  y  $Q = (c, d)$  tiene la dirección de  $(c - a, d - b)$ :

si  $b \neq d$  (esto es, la recta no es vertical, haga un dibujo), ya sabemos que podemos poner como vector dirección el punto  $(1, m)$ .

Pero  $(1, m) = (1, \frac{d-b}{c-a})$ , y como  $(c - a, d - b) = (c - a)(1, \frac{d-b}{c-a})$ , podemos tomar  $(c - a, d - b)$  como vector dirección.

si  $b = d$ , observemos que  $(c - a, d - b) = (c - a)(1, 0)$ , que tiene la dirección del punto  $(1, 0)$ , con lo cual es una recta vertical. (Ahora  $c \neq a$ , ya que los puntos  $P$  y  $Q$  son distintos.)

Directamente podemos observar que, dados  $P$  y  $Q$ , la ecuación paramétrica de la recta que pasa por ambos puntos es:  $X = \alpha(Q - P) + P$ . Para verificar esto, basta con tomar  $\alpha = 0$  para obtener  $X = P$ , y  $\alpha = 1$  para obtener  $X = Q$ .



## Aplicaciones

1. Los costos operativos de una compañía crecen en forma lineal con el paso del tiempo. En dos meses sucesivos los costos fueron \$5000 y \$6400. Estimar los costos tres meses después (del último).
2. Dos talleres A y B producen un mismo repuesto. El taller A tuvo un costo de instalación de \$7000 y cada repuesto vendido le produce una ganancia de \$35. El taller B tuvo un costo de instalación de \$4200 y cada repuesto vendido le da una ganancia de \$30. Plantear las ecuaciones que representan el balance de cada taller en función del número de repuestos vendidos. ¿A partir de cuántos repuestos vendidos el taller A tendrá mayor beneficio que el de B?

### Solución:

1. Nos están informando que los costos operativos crecen linealmente con el paso del tiempo. Podemos suponer que "arrancamos" en el instante  $x = 0$  con costos de \$5000, luego, para  $x = 2$  éstos serán de \$6400. Como la dependencia es lineal, si llamamos  $y$  al costo, es:  $y = mx + b$ . Por la primera condición  $b = 5000$ , por la segunda  $6400 = m \cdot 2 + 5000$ . Entonces,  $m = \frac{6400 - 5000}{2} = 700$ .

Resulta:  $y = 700x + 5000$ . Como nos están pidiendo el costo para  $x = 5$ , calculamos el costo

$$y = 700 * 5 + 5000 = 8500$$

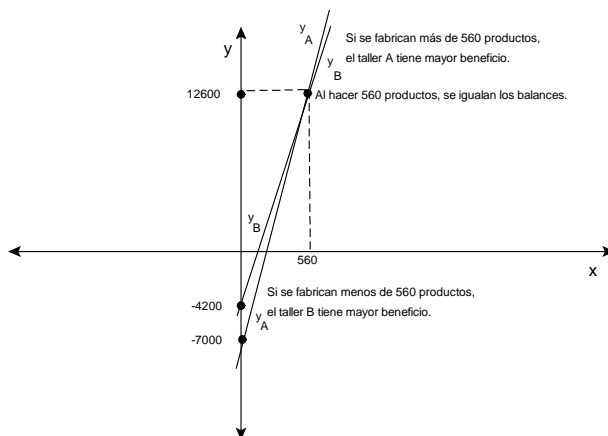
(Con \* notaremos la multiplicación, pues es el que usa el procesador que utilizamos)

2. La función balance del taller A es  $y_A = 35x - 7000$  (lo que tiene es lo que gana por artículo menos lo que gastó).

Análogamente, el balance del taller B es  $y_B = 30x - 4200$ . Aunque el ejercicio no lo pida, grafiquemos. Para ubicarnos mejor, calculemos la intersección de las rectas que representan los balances:

$$\begin{cases} y = 35x - 7000 \\ y = 30x - 4200 \end{cases}$$

Es entonces  $35x - 7000 = 30x - 4200$ , luego  $x = 560$  e  $y = 35 * 560 - 7000 = 12600$ . (\* designa el producto usual de números, escribiremos indistintamente  $35x$  o  $35 * x$ ). Esto significa que si en ambos talleres se fabrican 560 productos, la ganancia será (en los dos) de \$12600.



Entonces, a partir de los 560 productos el taller A va a tener mayor beneficio que el B.

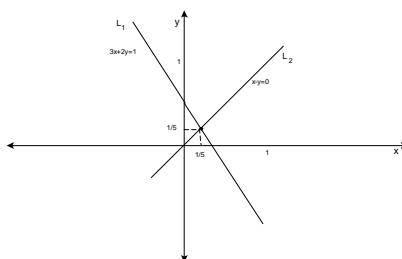
### Más ejemplos

1. Resolver gráfica y analíticamente los siguientes sistemas

a. 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Si despejamos  $y$  en la segunda ecuación, obtenemos:  $y = x$ . Reemplazando el valor obtenido de  $y$  en la primera ecuación, nos queda que  $3x + 2x = 1$ , de donde  $x = \frac{1}{5}$ . Como  $y = x$ , resulta  $y = \frac{1}{5}$ . Entonces, la solución del sistema es:  $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ . Si  $L_1$  es la recta definida por la primera ecuación y  $L_2$  la definida por la segunda, podemos poner:

$$L_1 \cap L_2 = \left\{ \left( \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \right) \right\}.$$



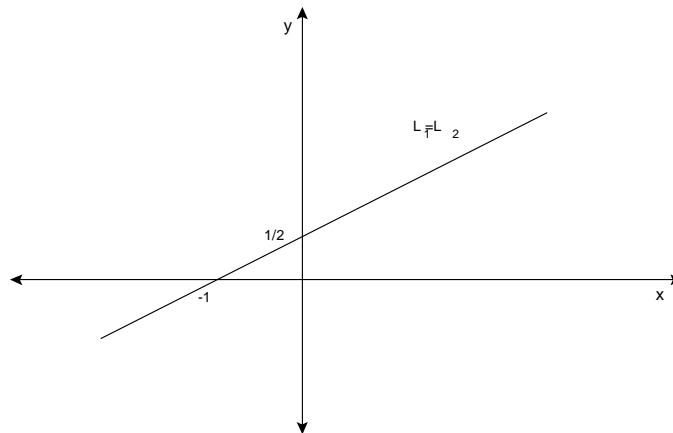
b. 
$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 3x - 6y = -3 \end{cases}$$

Observamos que si multiplicamos la primera ecuación miembro a miembro por "-3", obtenemos la segunda, luego, ambas tienen el mismo conjunto de soluciones.

En este caso, para expresar el conjunto de soluciones, debemos escribir la recta en forma paramétrica, que es la que nos dice "cómo fabricar" los puntos: dándole valores al parámetro.

De la primera ecuación tenemos que  $x = 2y - 1$ , luego, un punto es solución si es de la forma

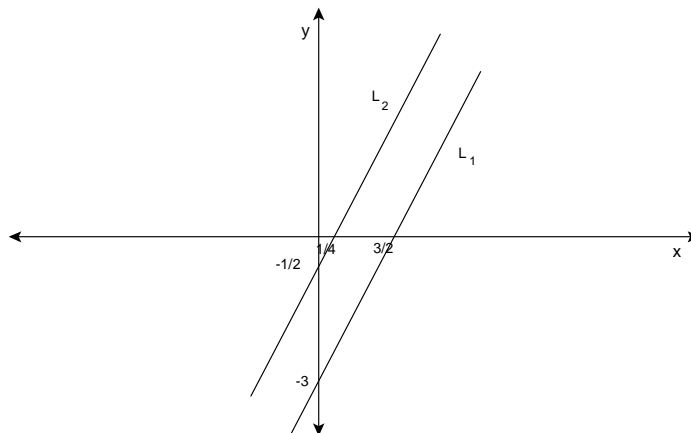
$$(2y - 1, y) = y(2, 1) + (-1, 0). \text{ La solución del sistema son los puntos } X = \alpha(2, 1) + (-1, 0).$$



c. 
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$$

Despejamos  $y$  de la primera ecuación y obtenemos  $y = 2x - 3$ . Reemplazando en la segunda ecuación nos queda que  $4x - 2(2x - 3) = 1$ . Distribuyendo obtenemos que  $4x - 4x + 6 = 1$ , de donde si las rectas tuvieran un punto en común, obtendríamos que  $6 = 1$ . Luego, las rectas no tienen puntos en común.

Podemos obtener esta conclusión directamente observando los coeficientes: el primer miembro de la segunda ecuación es el doble que el primer miembro de la primera ecuación, no así el término independiente.



d. 
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

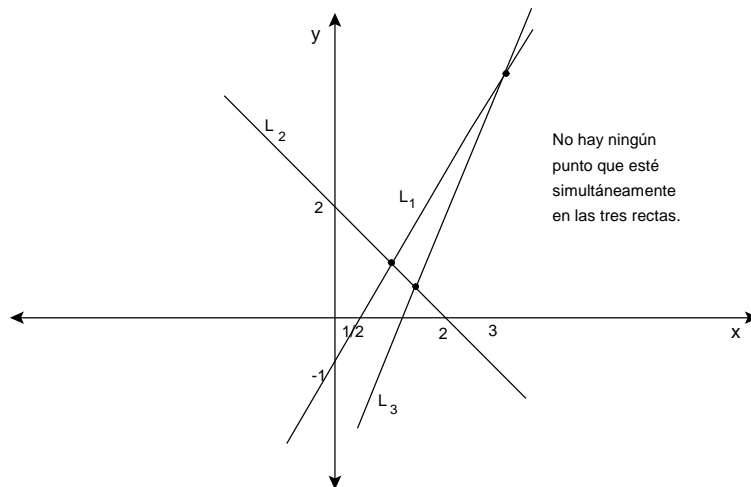
Si un punto verifica la primera y la segunda ecuación, entonces (sumando miembro a miembro ambas ecuaciones) tenemos que  $3x = 3$ , de donde  $x = 1$ . Reemplazando este valor en la primera ecuación (o en la segunda) tenemos que  $y = 1$ . Concluimos que las dos primeras rectas tienen en común el punto  $(1, 1)$ . Nos fijamos si este punto verifica la tercera ecuación:  $3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$ . Como sí la verifica, también está en la tercera recta. Indicamos la solución del sistema poniendo  $S = \{(1, 1)\}$ .

$$e. \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones son las mismas que en el ejemplo anterior, de donde sabemos

que el punto  $(1, 1)$  es solución del subsistema  $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ . Debemos fijarnos ahora si

este punto satisface la tercera ecuación:  $3 \cdot 1 - 1 \neq 4$ . Entonces, la recta definida por la tercera ecuación no pasa por el  $(1, 1)$ , con lo que no hay ningún punto que esté simultáneamente en las tres rectas. Para indicar que las tres rectas no tienen ningún punto en común ponemos:  $S = \emptyset$ .



$$f. \begin{cases} 3x - y = 3 \\ -x + \frac{1}{3}y = -1 \\ 6x - 2y = 6 \end{cases}$$

Si empezamos haciendo cuentas, despejemos  $y$  en la primera ecuación: obtenemos  $y = 3x - 3$ .

Reemplazamos en la segunda:  $-x + \frac{1}{3}(3x - 3) = -1$ . Distribuyendo, nos queda:  $-x + x - 1 = -1$ , y simplificando obtenemos  $0 = 0$ . Esto significa que todos los puntos de la primera ecuación satisfacen la segunda: ambas ecuaciones definen la misma recta.

Si reemplazamos ahora en la tercera:  $6x - 2(3x - 3) = 6$  nos queda que:  $6x - 6x + 6 = 6$ .

Igual que antes, esta ecuación define la misma recta que la primera.

En conclusión, el sistema tiene infinitas soluciones, y como  $(x, 3x - 3) = x(1, 3) + (0, -3)$ ,

la solución del sistema expresada en forma paramétrica es  $X = \alpha(1, 3) + (0, -3)$ .

2. Una compañía de enchapados para joyas de fantasía fabrica 2 mezclas distintas, ambas a base de plata y oro.

La mezcla Premium lleva 7 g de polvo de oro por cada 3 g de polvo de plata.

La mezcla Standard lleva 4 g de polvo de oro por cada 6 g de polvo de plata. La compañía posee en este momento un stock de 25 kg polvo de oro y 30 kg de polvo de plata.

¿Cuántos kg de cada tipo de mezcla debe fabricar para agotar el stock?

**Solución**

Pongamos  $x = \text{kg}$  de Premium a fabricar e  $y = \text{kg}$  de Standard.  
 Como tenemos restricciones de stock, planteamos una ecuación para la cantidad de oro usado y otra para la de la plata.

Si se fabrican  $x$  kg de Premium, el oro gastado ahí será de  $\frac{7}{10}x$ : si dividimos el total de la mezcla Premium fabricada en diez partes iguales, 7 serán de oro y 3 de plata (suponiendo que todavía no mezclamos- luego, hay  $\frac{7}{10}x$  de kg de oro en la mezcla Premium).

Análogamente, si se fabrican  $y$  kg de Standard, el oro gastado ahí es  $\frac{4}{10}y$ , luego, la "ecuación para el oro" es  $\frac{7}{10}x + \frac{4}{10}y = 25$ .

De la misma manera, construimos la "ecuación para la plata": es  $\frac{3}{10}x + \frac{6}{10}y = 30$ .

Debe resolverse entonces el sistema  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{7}{10}x + \frac{4}{10}y = 25 \\ \frac{3}{10}x + \frac{6}{10}y = 30 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right.$

Observemos que  $x \geq 0, y \geq 0$  pues se trata de kilos. Luego,  
se deben fabricar 10kg de Premium y 45kg de Standard.

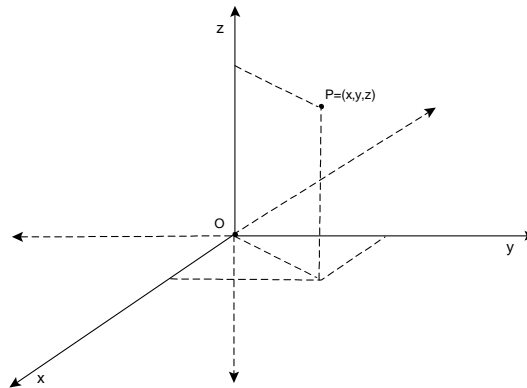
Hasta acá hemos trabajado sólo con dos incógnitas. Ahora comenzaremos a hacerlo con tres. Para eso, primero estudiaremos:

$R^3$

El espacio  $R^3$  está formado por las ternas de números reales:

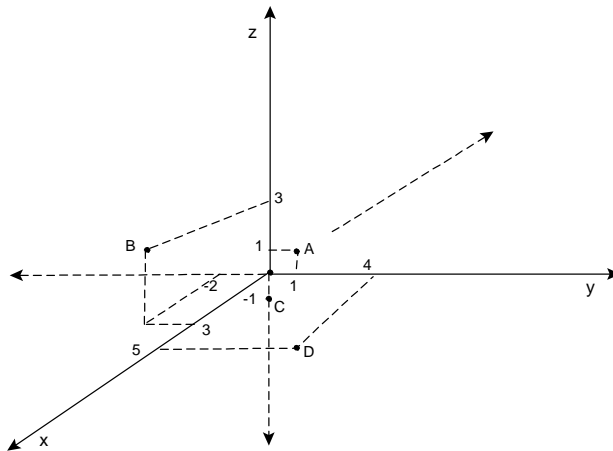
$$R^3 = \{(x, y, z) : x \in R, y \in R, z \in R\}.$$

El punto  $O = (0, 0, 0)$  se llama *origen*.



Así como el plano queda dividido en cuatro cuadrantes, ahora tenemos ocho octantes, de acuerdo con el signo de las coordenadas.

Intentemos graficar los puntos  $A = (0, 1, 1)$ ,  $B = (3, -2, 3)$ ,  $C = (0, 0, -1)$  y  $D = (5, 4, 0)$ :



Así como habíamos definido suma de puntos en el plano y multiplicación de un escalar por un punto, definimos en el espacio:

1.  $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$
2.  $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ , siendo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Por ejemplo,  $(2, 1, -1) + 3(1, 0, 5) = (2, 1, -1) + (3, 0, 15) = (5, 1, 14)$ .

Definimos ahora:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

El punto  $O = (0, 0, \dots, 0)$  se llama *origen*.

De la misma manera que en el plano y en el espacio, los *puntos de  $\mathbb{R}^n$*  se pueden sumar y multiplicar por escalares. Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^4$ :

$$-3(1, 0, 0, -2) - (2, 1, 1, 6) = (-3, 0, 0, 6) + (-2, -1, -1, -6) = (-5, -1, -1, 0).$$

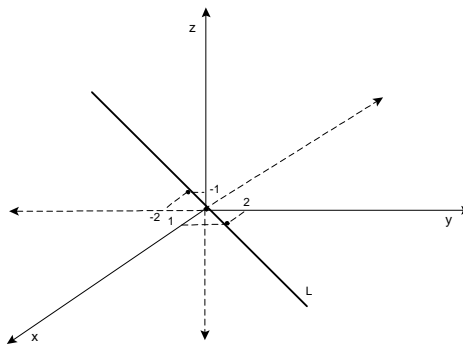
### Rectas en $\mathbb{R}^3$

En cada caso, representar en un sistema de coordenadas en el espacio.

1. Todos los puntos de la forma  $\alpha(1, 2, 0)$  :

$\alpha$	$(x, y, z)$
0	(0, 0, 0)
1	(1, 2, 0)
-1	(-1, -2, 0)

Dándole valores al parámetro  $\alpha$ , obtenemos puntos en el espacio:



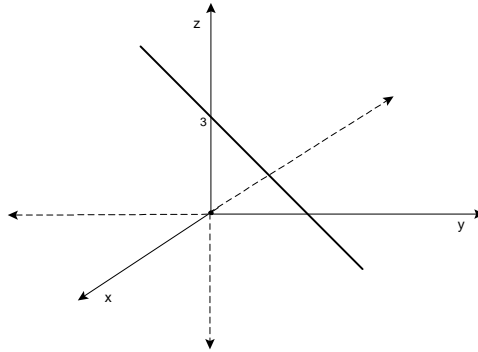
Vemos que, al igual que en el plano, el gráfico de  $X = \alpha(a, b, c)$  es una recta que pasa por el

- origen.  
 2. Todos los puntos de la forma  $\alpha(1, 2, 0) + (0, 0, 3)$ :

$\alpha$	$(x,y,z)$
0	(0, 0, 3)
1	(1, 2, 3)

Como antes, nos ayudamos con una tabla:

Como se trata de una recta, basta con obtener dos puntos. Gráficamente:

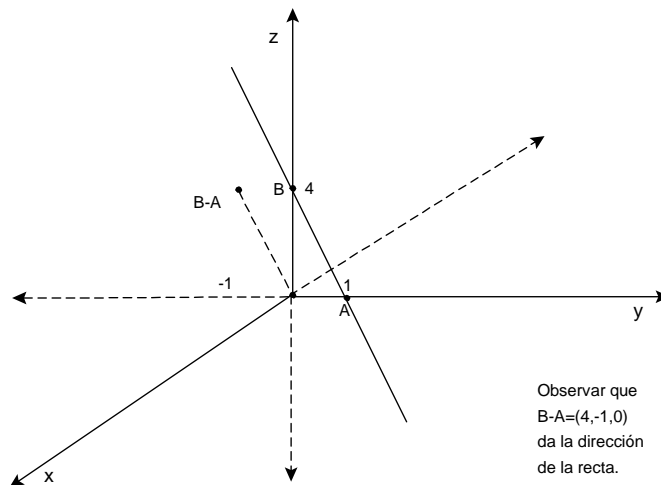


Como en el plano, los puntos de la forma  $X = \alpha V + P$  están en una recta.  $V$  se llama *vector dirección* y  $P$  un *punto de paso*; esta ecuación es la *ecuación paramétrica* de la recta. Igual que antes, dos rectas son *paralelas* si el vector dirección de una es múltiplo del vector dirección de la otra.

3. Dar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos  $A = (0, 1, 0)$  y  $B = (0, 0, 4)$ . De la misma manera que en el plano, podemos poner  $X = \alpha(B - A) + A$ : si  $\alpha = 0$  obtenemos  $X = A$ , si  $\alpha = 1$  obtenemos  $X = B$ . El vector dirección es  $B - A$ , el punto de paso es  $A$ . La ecuación es:  $X = \alpha(0, -1, 4) + (0, 1, 0)$ .

Observemos que hay más respuestas posibles. Por ejemplo:  $X = \alpha(A - B) + B$ , o  $X = \alpha(A - B) + A$ , etc.

Como vector dirección se puede tomar cualquier múltiplo (no nulo) de  $(B - A)$ , esto es, cualquier vector de la forma  $k(B - A)$ , con  $k \neq 0$ , y como punto de paso cualquier punto de la recta.



Observar que  $B-A=(4,-1,0)$  da la dirección de la recta.

4. Hallar la ecuación paramétrica de la recta paralela a la anterior que pasa por  $P = (0, 2, 5)$ .

Ya que la recta que estamos buscando es paralela a la anterior, podemos tomar como vector dirección  $(0, -1, 4)$ . Como un dato es que la recta buscada pasa por  $(0, 2, 5)$ , ésta tiene ecuación:

$$X = \alpha(0, -1, 4) + (0, 2, 5)$$

### Posiciones relativas de dos rectas en $R^3$

Calcular la intersección de  $L_1$  y  $L_2$  en los siguientes casos:

1.  $L_1 : X = \alpha(1, -4, 2) + (3, 1, 0)$      $L_2 : X = \beta(2, -1, 1) + (-3, -3, 0)$
2.  $L_1 : X = \alpha(2, 4, -2) + (3, 0, 2)$      $L_2 : X = \beta(-1, -2, 1) + (5, 4, 0)$
3.  $L_1 : X = \alpha(2, 4, -2) + (3, 0, 2)$      $L_2 : X = \beta(-1, -2, 1) + (2, 0, 1)$
4.  $L_1 : X = \alpha(1, -4, 2) + (3, 1, 0)$      $L_2 : X = \beta(2, -1, 1) + (-2, 7, 0)$

#### Soluciones:

El método es similar al empleado en calcular las intersecciones de rectas en el plano cuando ambas estaban dadas paramétricamente.

1. Si  $X = (x, y, z)$  es un punto de  $L_1$ , entonces

$$(x, y, z) = \alpha(1, -4, 2) + (3, 1, 0) = (\alpha + 3, -4\alpha + 1, 2\alpha)$$

Si  $X = (x, y, z)$  es un punto de  $L_2$ , entonces

$$(x, y, z) = \beta(2, -1, 1) + (-3, -3, 0) = (2\beta - 3, -\beta - 3, \beta)$$

Si  $X = (x, y, z)$  es un punto de ambas rectas, entonces ambas expresiones deben ser iguales, esto es:

$$(\alpha + 3, -4\alpha + 1, 2\alpha) = (2\beta - 3, -\beta - 3, \beta)$$

Igualando coordenada a coordenada, obtenemos el sistema de tres ecuaciones (una por cada coordenada) y dos incógnitas ( $\alpha$  y  $\beta$ ):

$$\begin{cases} \alpha + 3 = 2\beta - 3 & (1) \\ -4\alpha + 1 = -\beta - 3 & (2) \\ 2\alpha = \beta & (3) \end{cases}$$

En (3), tenemos a  $\beta$  despejada. Reemplazamos en (1) y obtenemos  $\alpha + 3 = 2(2\alpha) - 3$ , de donde  $\alpha = 2$ . Como  $2\alpha = \beta$ , entonces  $\beta = 4$ . **Cuidado**, no nos olvidemos que todas las ecuaciones se deben verificar (todas las coordenadas deben ser iguales), y no hemos aún impuesto que se verifique (2). Nos fijamos si los valores hallados de los parámetros satisfacen esta ecuación:  $-4 * 2 + 1 \stackrel{?}{=} -4 - 3$ . Sí, se verifica:  $-7 = -7$  (recordar que  $*$  designa el producto de dos números).

Haciendo  $\alpha = 2$  en  $L_1$ , obtenemos  $X = (2 + 3, -4 * 2 + 1, 2 * 2) = (5, -7, 4)$ .

Podemos chequear que no nos equivocamos haciendo  $\beta = 4$  en  $L_2$ , obteniendo el mismo punto  $X = (2 * 4 - 3, -4 - 3, 4) = (5, -7, 4)$ .

Entonces,  $L_1 \cap L_2 = \{(5, -7, 4)\}$ .

2. Procedemos igual que en el caso anterior, igualando los puntos de ambas rectas:

$$\alpha(2, 4, -2) + (3, 0, 2) = \beta(-1, -2, 1) + (5, 4, 0)$$

Esto es:

$$(2\alpha + 3, 4\alpha, -2\alpha + 2) = (-\beta + 5, -2\beta + 4, \beta)$$

Igualando coordenada a coordenada:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3 = -\beta + 5 & (1) \\ 4\alpha = -2\beta + 4 & (2) \\ -2\alpha + 2 = \beta & (3) \end{cases}$$

En (3) tenemos  $\beta$  ya despejada. Reemplazamos en (1):  $2\alpha + 3 = -(-2\alpha + 2) + 5$ . Luego, obtenemos que  $2\alpha + 3 = 2\alpha + 3$ , esto es,  $0 = 0$ . ¿Y  $\alpha$ ? Lo que está pasando es que esta ecuación se cumple para todo valor de  $\alpha$ . Veamos qué pasa si reemplazamos en (2):  $4\alpha = -2(-2\alpha + 2) + 4$ . De acá también obtenemos que  $0 = 0$ , entonces la ecuación (2) también se verifica para todo valor de  $\alpha$ .

¿Qué significa esto? Que con cualquier valor del parámetro se obtiene un punto común de  $L_1$  y  $L_2$ , esto es, son rectas coincidentes. Por ejemplo: si  $\alpha = 0$ , obtenemos el punto de  $L_1$   $X = (2 * 0 + 3, 4 * 0, -2 * 0 + 2) = (3, 0, 2)$ . También está en  $L_2$ : usamos (3) para ver con qué valor del parámetro  $\beta$  se obtiene este punto en  $L_2$ :  $\beta = 2$ . Utilizando este valor obtenemos el punto de  $L_2$   $(-2 + 5, -2 * 2 + 4, 2) = (3, 0, 2)$ . Queda como ejercicio comprobar que tienen otro punto en común (tomar por ejemplo  $\alpha = 1$ ). Nuevamente concluimos que son rectas coincidentes, pues si tienen dos puntos en común, son la misma recta. Esto es:  $L_1 \cap L_2 = L_1$ .

3. Procediendo como antes, si  $X$  es un punto de  $L_1$  y de  $L_2$  entonces  $X = (2\alpha + 3, 4\alpha, -2\alpha + 2) = (-\beta + 2, -2\beta, \beta + 1)$ . Luego,

$$\begin{cases} 2\alpha + 3 = -\beta + 2 & (1) \\ 4\alpha = -2\beta & (2) \\ -2\alpha + 2 = \beta + 1 & (3) \end{cases}$$

De (2) obtenemos que  $\beta = -2\alpha$ . Reemplazando en (1):  $2\alpha + 3 = -(-2\alpha) + 2$ , de donde...  $3 = 2$ !. Esto significa que ningún valor de  $\alpha$  verifica la condición pedida, pues si lo hubiera, concluiríamos que  $3 = 2$ . Entonces, no hay puntos de  $L_1$  que estén en  $L_2$ .

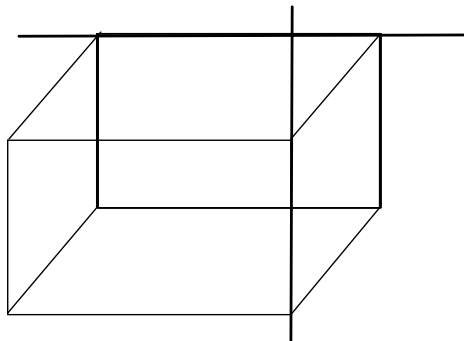
Las rectas no tienen puntos comunes.

Observemos que los vectores direcciones cumplen  $(2, 4, -2) = -2(-1, -2, 1)$ , es decir, las rectas son paralelas.

4. Ahora,  $X = (\alpha + 3, -4\alpha + 1, 2\alpha) = (2\beta - 2, -\beta + 7, \beta)$ . Resolviendo como recién, llegamos también a que

las rectas no tienen puntos comunes, sin embargo, ahora no son paralelas.

Esta situación es nueva. En el plano, dos rectas que no son paralelas siempre tienen intersección no vacía. En el espacio "hay más lugar". Imaginemos por ejemplo las rectas que contienen las siguientes aristas de un cubo:



Claramente, no son paralelas. Tampoco se cortan (están contenidas en planos paralelos: una en la cara de adelante del cubo, la otra en la de atrás).

Diremos que dos rectas son *albeadas* si no son paralelas y su intersección es vacía. (Observar que esta condición es equivalente a pedir que no exista un plano que las contenga a ambas.)

## Planos en $R^3$

### Ecuación paramétrica. Ejemplos.

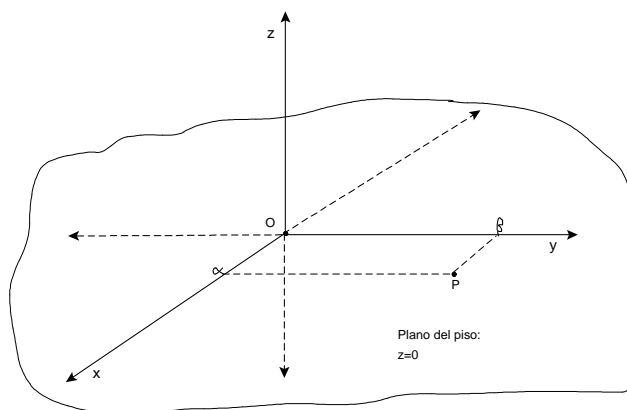
1. Representar en  $R^3$  los puntos de la forma  $\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0)$ ,  $\alpha \in R$ ,  $\beta \in R$ .

Si hacemos  $\beta = 0$ , nos quedan los puntos de la forma  $\alpha(1, 0, 0)$ , que ya sabemos que es una recta, y que pasa por el origen. Como son los múltiplos de  $(1, 0, 0)$ , esta recta es el eje  $x$ .

Si hacemos  $\alpha = 0$ , los puntos que obtenemos son de la forma:  $\beta(0, 1, 0)$ , que es el eje  $y$ .

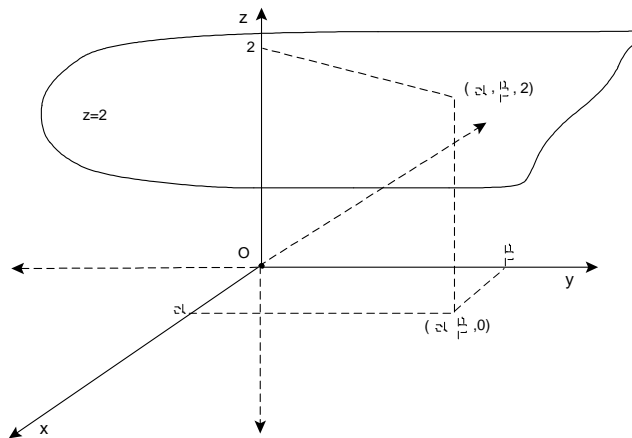
Y si sumamos un punto del eje  $x$  con uno del eje  $y$  y obtenemos un punto del "plano del piso":

$P = (\alpha, \beta, 0)$ . Los parámetros pueden tomar cualquier valor, mientras que la tercera coordenada debe ser 0.



2. Representar en  $R^3$  los puntos de la forma  $\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + (0, 0, 2)$ ,  $\alpha \in R$ ,  $\beta \in R$ .

Ahora, un punto del plano es de la forma  $X = (\alpha, \beta, 2)$ . Para graficar, podemos partir del plano anterior, pero en este caso a cada punto del plano del piso "le damos altura 2":



Este plano es paralelo al anterior.

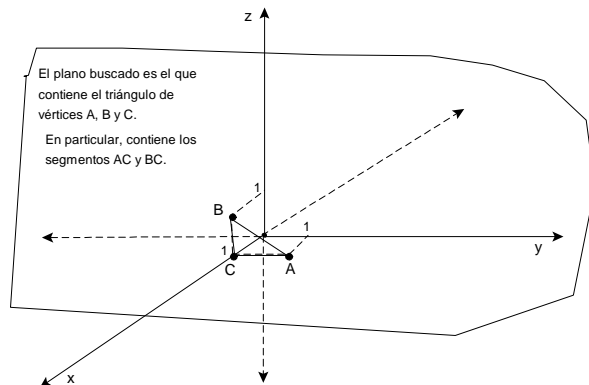
En general, si  $V \in R^3$ ,  $W \in R^3$ , los puntos de la forma  $X = \alpha V + \beta W$  están en un plano que pasa por el origen.

Y, si  $P \in R^3$ , los puntos de la forma  $X = \alpha V + \beta W + P$  están en un plano paralelo al anterior que pasa por el punto  $P$ . Esta ecuación se llama *ecuación paramétrica del plano*.

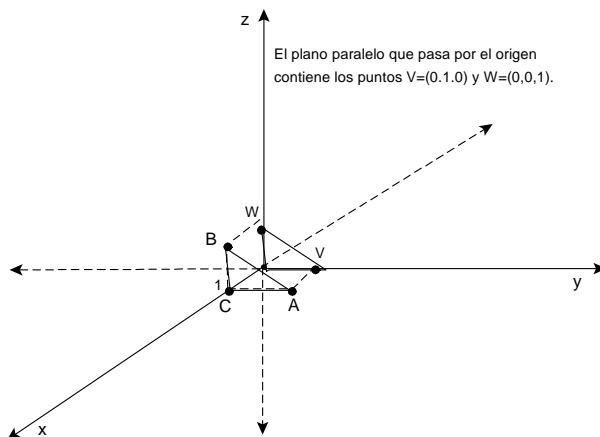
### Ejemplo

Representar en  $R^3$  el plano  $\pi$  que pasa por los puntos  $A = (1, 1, 0)$ ,  $B = (1, 0, 1)$  y  $C = (1, 0, 0)$ .

Primero grafiquemos:



Ahora queremos encontrar la ecuación paramétrica de este plano. Para esto, veamos primero cuál es la ecuación paramétrica del plano paralelo que pasa por el origen,  $\pi_0$ , que es más fácil.



Observemos que

$$V = (0, 1, 0) = (1, 1, 0) - (1, 0, 0) = A - C, \quad W = (0, 0, 1) = (1, 0, 1) - (1, 0, 0) = B - C$$

Entonces, la ecuación de  $\pi_0$  es  $X = \alpha(0, 1, 0) + \beta(0, 0, 1)$  (No hace falta sumarle el punto de paso  $P = (0, 0, 0)$ .) Ahora, lo trasladamos y hacemos que pase por  $C = (1, 0, 0)$ , obteniendo la ecuación de  $\pi$ :

$$X = \alpha(0, 1, 0) + \beta(0, 0, 1) + (1, 0, 0).$$

En general, la ecuación paramétrica del plano que pasa por los puntos no alineados (se pueden pensar como los vértices de un triángulo)  $A$ ,  $B$  y  $C$  es

$$X = \alpha(A - C) + \beta(B - C) + C$$

## Ecuación implícita de un plano.

### Ejemplo

Supongamos que tenemos la siguiente ecuación paramétrica de un plano:

$$X = \alpha(1, 0, 2) + \beta(2, -1, 3) + (4, 1, -1).$$

Los puntos que están en este plano verifican

$$(x, y, z) = (\alpha + 2\beta + 4, -\beta + 1, 2\alpha + 3\beta - 1).$$

Si igualamos coordenada a coordenada obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta + 4 \\ y = -\beta + 1 \\ z = 2\alpha + 3\beta - 1 \end{cases}.$$

Queremos ahora "eliminar" los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , para poder ver directamente cuál es la relación que deben tener las coordenadas de un punto para que esté en el plano dado.

Despejando  $\beta$  de la segunda ecuación, tenemos que  $\beta = -y + 1$ .

Sustituyendo este valor en la primera ecuación, nos queda que:  $x = \alpha + 2(-y + 1) + 4 = \alpha - 2y + 6$ .

Ahora podemos despejar  $\alpha$ :  $\alpha = x + 2y - 6$ .

Sustituimos las expresiones obtenidas de los parámetros en función de las coordenadas en la tercera ecuación:  $z = 2(x + 2y - 6) + 3(-y + 1) - 1 = 2x + y - 10$ . Pasando a la derecha los términos que contienen las variables, obtenemos la ecuación implícita del plano:

$$-2x - y + z = -10.$$

En general, la *ecuación implícita de un plano* es de la forma  $Ax + By + Cz = D$ , siendo alguno de los coeficientes  $A$ ,  $B$  o  $C$  distinto de 0.

### Ejercicio

Representar los puntos de  $R^3$  que satisfacen:

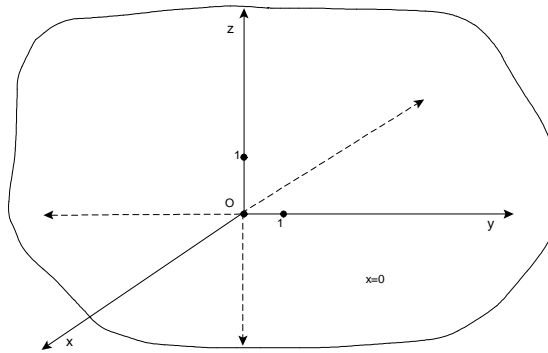
1.  $x = 0$ .
2.  $y = 0$ .
3.  $z = 0$ .
4.  $z = 2$ .
5.  $x + y = 1$ .
6.  $x + y + z = 3$ .

### Soluciones:

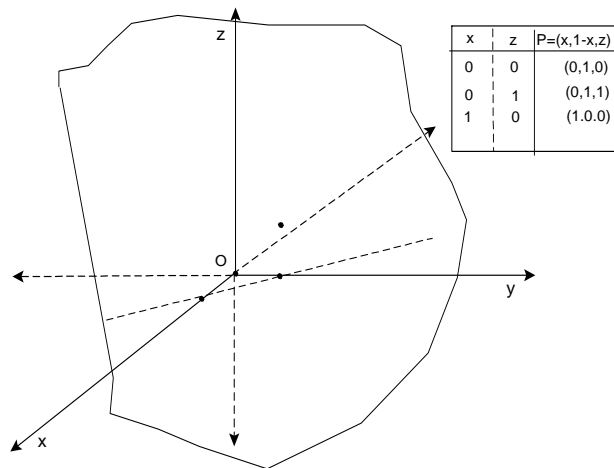
1. Como tres puntos no alineados determinan un plano, dibujemos tres puntos que verifiquen la condición de que la primera coordenada sea 0. Por ejemplo  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$ ,  $C = (0, 0, 1)$ .

Podríamos poner también que, si  $X$  está en el plano, es de la forma

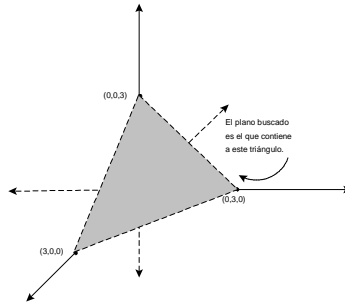
$X = (0, y, z) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$ . En particular, haciendo  $z = 0$ , vemos que están en el plano los puntos de la forma  $y(0, 1, 0)$  -el eje  $y$ - y los puntos de la forma  $z(0, 0, 1)$  -el eje  $z$ -. Este plano se llama *plano coordenado yz*.



2. De la misma manera que en el caso anterior, podemos dar la ecuación paramétrica del plano  $X = (x, 0, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1)$ . Este plano se llama *plano coordenado xz*. El dibujo queda como ejercicio.
3. Ahora es  $X = (x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0)$ . Éste es el *plano coordenado xy* donde el dibujo es el "plano del piso".
4. Queremos ahora que  $z = 2$ , luego, un punto va a estar en este plano si es de la forma  $X = (x, y, 2) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + (0, 0, 2)$ . Es un plano paralelo al anterior que pasa por el punto  $(0, 0, 2)$ . El dibujo está en el ejemplo 2 del apartado anterior.
5. Si  $x + y = 1$  entonces  $y = 1 - x$ ;  $z$  es cualquier punto pues no tiene ninguna restricción. De acá resulta que un punto de este plano es de la forma  $X = (x, 1 - x, z) = x(1, -1, 0) + z(0, 0, 1) + (0, 1, 0)$ . Para graficar, podemos ayudarnos con el plano  $x(1, -1, 0) + z(0, 0, 1)$ , que es el paralelo que pasa por el origen y contiene las rectas:  $x(1, -1, 0)$  y  $z(0, 0, 1)$ . Luego, lo trasladamos al punto  $(0, 1, 0)$ .



- Otra forma de resolver es encontrando tres puntos no alineados que estén en el plano. Un punto es el de paso:  $(0, 1, 0)$ . Para encontrar otros, les damos valores a los parámetros: si  $x = 0$  y  $z = 1$ , obtenemos  $X = (0, 1, 1)$ ; si  $x = 1$  y  $z = 0$ ,  $X = (1, 0, 0)$ .
6. Observamos que este plano contiene los puntos  $(3, 0, 0)$ ,  $(0, 3, 0)$  y  $(0, 0, 3)$ . Para obtener la ecuación paramétrica, podemos despejar  $z$ , obteniendo:  $z = 3 - x - y$ . Luego, un punto  $X$  del plano es de la forma  $X = (x, y, 3 - x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) + (0, 0, 3)$ .



## Intersección de planos. Ecuación implícita de una recta.

Como hemos visto, una ecuación lineal en el plano representa una recta. Sin embargo, en el espacio, representa un plano. Para obtener una recta, podríamos pensarla como intersección de dos planos no paralelos. Por ejemplo: si consideramos los planos dados por  $x = 0$ , e  $y + z = 1$ , el siguiente sistema, dado por las ecuaciones de ambos planos

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

representa la recta intersección. Diremos que ésta es la *ecuación implícita* de esta recta.

Hallar la solución del sistema es hallar la ecuación paramétrica de esta recta, la cual nos da una manera de generar todos los puntos que verifiquen ambas ecuaciones. En este caso, de la segunda ecuación obtenemos que  $z = 1 - y$ . Como  $x = 0$ , la ecuación paramétrica de la recta es  $X = (0, y, 1 - y) = y(0, 1, -1) + (0, 0, 1)$ .

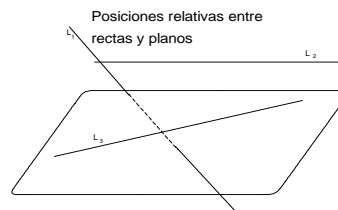
## Intersección de una recta con un plano.

Calcular la intersección de  $L$  y  $\pi$  en cada caso:

- $L_1 : X = \alpha(1, 3, -1) + (2, 2, 0)$  y  $\pi : x + y + z = 1$ .
- $L_2 : X = \alpha(1, -1, 0) + (1, 0, 1)$  y  $\pi : x + y + z = 1$ .
- $L_3 : X = \alpha(1, -1, 0) + (2, 0, -1)$  y  $\pi : x + y + z = 1$ .

### Solución

- Si un punto  $X$  está en  $L_1$ , entonces  $X = (x, y, z) = (\alpha + 2, 3\alpha + 2, -\alpha)$ . Si además este punto está en el plano  $\pi$ , entonces debe satisfacer la ecuación  $x + y + z = 1$ . Reemplazando las coordenadas de  $X$  en esta ecuación, obtenemos  $\alpha + 2 + 3\alpha + 2 - \alpha = 1$ , de donde  $\alpha = -1$ .  
Entonces  $X = (-1 + 2, 3 * (-1) + 2, -(-1)) = (1, -1, 1)$ . Luego,  $X \cap L_1 = \{(1, -1, 1)\}$ .
- Ahora un punto de la recta es de la forma  $(x, y, z) = (\alpha + 1, -\alpha, 1)$ . Reemplazando en la ecuación del plano obtenemos  $\alpha + 1 - \alpha + 1 = 1$ , de donde  $2 = 1$ . De acá concluimos que  $X \cap L_2 = \emptyset$  (no se cortan).
- Ahora tenemos  $(x, y, z) = (\alpha + 2, -\alpha, -1)$ , y al reemplazar en la ecuación del plano  $\alpha + 2 - \alpha - 1 = 1$  nos queda  $1 = 1$ . Todo punto de la recta satisface la ecuación del plano, entonces  $X \cap L_3 = L_3$  (la recta está contenida en el plano).



## Ejercicios varios

- Sean  $L_1 : y = 5x - 3$ ;  $L_2 : X = t(2, 1) + (5, 0)$ ;  $P$  el punto de  $L_1$  con ordenada igual a 7 y  $Q$  el punto de  $L_2$  con abscisa igual a 2.  
Encontrar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por  $P$  y  $Q$ .
- Sean  $L_1$  la recta de dirección  $(2, -1)$  que pasa por  $(8, -2)$  y  $L_2$  la recta de ecuación  $X = \alpha(-1, 1) + (9, -7)$ .  
Hallar, si existe, el punto de  $R^2$  en que se cortan  $L_1$  y  $L_2$ .
- Sea  $L$  la recta de  $R^3$  que pasa por  $A = (1, 3, -1)$  y  $B = (4, 1, 0)$ .  
Hallar el punto de  $L$  cuya segunda coordenada sea igual a 0.
- Para la recta del ejercicio anterior, hallar todos los puntos que están en alguno de los planos coordenados.

### Soluciones:

- Para encontrar  $P$ , hacemos  $y = 7$  y despejamos  $x$  de  $7 = 5x - 3$ : es  $x = 2$ . Entonces,  $P = (2, 7)$ .  
Para encontrar  $Q$ , vemos que los puntos de  $L_2$  son de la forma  $Q = (2t + 5, t)$ . Si la abscisa es 2, resulta que  $2t + 5 = 2$ , luego,  $t = \frac{2-5}{2} = -\frac{3}{2}$ .  
Reemplazando  $t$  por su valor, obtenemos  $Q = (2, -\frac{3}{2})$ .  
La recta que pasa por  $P$  y  $Q$  es  $X = \alpha(Q - P) + P = \alpha((2, -\frac{3}{2}) - (2, 7)) + (2, 7)$ , luego la respuesta es  $X = \alpha(0, -\frac{17}{2}) + (2, 7)$ .
- Es  $L_1 : X = \beta(2, -1) + (8, -2)$ , luego, un punto de esta recta es de la forma  $(2\beta + 8, -\beta - 2)$ .  
Un punto de  $L_2$  es de la forma  $(-\alpha + 9, \alpha - 7)$ .  
Si un punto está en ambas rectas, debe ser  $(2\beta + 8, -\beta - 2) = (-\alpha + 9, \alpha - 7)$ .  
Entonces: 
$$\begin{cases} 2\beta + 8 = -\alpha + 9 \\ -\beta - 2 = \alpha - 7 \end{cases}$$
  
De la segunda ecuación obtenemos  $\alpha = -\beta + 5$ ; reemplazando en la primera:  
 $2\beta + 8 = -(-\beta + 5) + 9$ , de donde  $\beta = -4$ .  
El punto buscado es entonces  $(2(-4) + 8, -(-4) - 2) = (0, 2)$ . Esto es, el punto intersección de las rectas es  $(0, 2)$ .  
Observemos que  $\alpha = -\beta + 5 = 4 + 5 = 9$ , de donde podríamos haber obtenido la solución calculando  $(-\alpha + 9, \alpha - 7) = (0, 2)$  para  $\alpha = 9$ .
- Para hallar la recta que pasa por  $A$  y  $B$  primero hallamos la dirección:  
 $(B - A) = (4, 1, 0) - (1, 3, -1) = (3, -2, 1)$ . Entonces, la recta tiene ecuación paramétrica:  
 $X = \alpha(3, -2, 1) + (1, 3, -1)$ . Luego:  $X = (3\alpha + 1, -2\alpha + 3, \alpha - 1)$ .  
Si la segunda coordenada es 0, resulta  $-2\alpha + 3 = 0$ , de donde  $\alpha = \frac{3}{2}$ .  
Reemplazando en la expresión genérica de un punto de la recta haciendo  $\alpha = \frac{3}{2}$ , obtenemos el punto  $(\frac{11}{2}, 0, \frac{1}{2})$ .  
Entonces, el punto de  $L$  se segunda coordenada 0 es  $(\frac{11}{2}, 0, \frac{1}{2})$ .
- Nos piden hallar los puntos de la recta de ecuación  $X = (3\alpha + 1, -2\alpha + 3, \alpha - 1)$  que estén en alguno de los planos coordenados. Si observamos lo que hemos hecho en el ejercicio anterior, hemos hallado uno de los puntos pedidos, ya que
  - intersecar con el plano coordenado  $yz$  es buscar el punto que tiene primera coordenada igual a 0,
  - intersecar con el plano coordenado  $xz$  es buscar el punto que tiene segunda coordenada igual a 0,
  - intersecar con el plano coordenado  $xy$  es buscar el punto que tiene tercera coordenada igual a 0.

Ya hemos hecho b. Ahora vamos a hacer a., quedando c. como ejercicio.

Es  $X = (3\alpha + 1, -2\alpha + 3, \alpha - 1)$ , y nos piden que  $3\alpha + 1 = 0$ , entonces  $\alpha = -\frac{1}{3}$ , con lo cual  $X = (3(-\frac{1}{3}) + 1, -2(-\frac{1}{3}) + 3, (-\frac{1}{3}) - 1) = (0, \frac{11}{3}, -\frac{4}{3})$ .

Entonces, el punto de la recta que está en el plano coordenado yz es  $X = (0, \frac{11}{3}, -\frac{4}{3})$ .

## Aplicaciones a la economía: ecuación presupuestaria, recta balance y plano balance

Supongamos que un consumidor quiere invertir exactamente un monto de \$  $M$  - *presupuesto del consumidor* - en dos bienes A y B, cuyos precios por unidad son  $p_A$  y  $p_B$  respectivamente. Si

$$\begin{aligned}x &= \text{cantidad de unidades que compra de A e} \\y &= \text{cantidad de unidades que compra de B,}\end{aligned}$$

entonces la ecuación

$$M = p_A x + p_B y$$

se llama *ecuación presupuestaria*, y da todas las combinaciones de unidades de A y B que se pueden comprar en estas condiciones.

### Ejemplo

Queremos gastar exactamente \$150 en cuadernos y biromes. Cada cuaderno cuesta \$10 y cada birome cuesta \$5. Si vamos a comprar  $x$  cuadernos e  $y$  biromes, entonces la ecuación presupuestaria en este caso es

$$150 = 10x + 5y$$

Podemos escribir esta ecuación de otra forma. Dividamos a ambos miembros por 150, entonces:

$$1 = \frac{10}{150}x + \frac{5}{150}y$$

Simplificando:

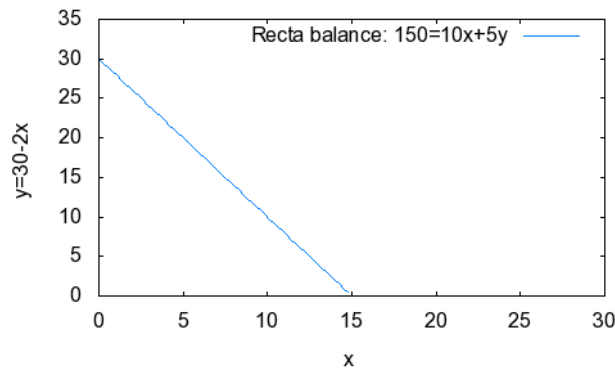
$$1 = \frac{x}{15} + \frac{y}{30}$$

Esta forma de escribir la ecuación se llama *ecuación segmentaria*.

La gráfica de la ecuación es una recta, y se llama *recta balance*.

Observaciones:

1. Dibujamos sólo en el primer cuadrante, ya que como  $x$  e  $y$  son cantidades, deben verificarse las condiciones  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ .
2. La máxima cantidad de cuadernos que podemos comprar es 15 (en cuyo caso, no compramos ninguna birome)



balance 1.png

3. La cantidad máxima de biromes que podemos comprar es 30 (y no compramos ningún cuaderno)
4. Recordemos que la ecuación segmentaria es  $1 = \frac{x}{15} + \frac{y}{30}$ : de acá obtenemos inmediatamente los valores máximos de los ítems anteriores.
5. La pendiente de la recta es negativa, al igual que en todas la rectas balance, ya que si  $M = ax + by$ , con  $a > 0$  y  $b > 0$ , entonces  $y = -\frac{a}{b}x + \frac{M}{b}$ . En este ejemplo,  $y = -2x + 30$ .
6. Los puntos del primer cuadrante que pertenecen a la recta nos dan todas las posibilidades de compra. En este caso, como son cuadernos y biromes, sólo nos interesan los puntos de coordenadas enteras. Por ejemplo, podemos comprar 1 cuaderno y 28 biromes; o 2 cuadernos y 26 biromes, etc.

Si en lugar de querer comprar dos producto queremos comprar tres, la ecuación presupuestaria es de la forma

$$M = p_Ax + p_By + p_Cz$$

donde  $z$  es la cantidad de unidades que compramos del tercer producto  $C$ , y  $p_C$  es el precio por unidad de  $C$ . En este caso, el gráfico es un plano, llamado *plano balance*.

### Ejercicios

1. Un consumidor dispone de un presupuesto fijo de \$45 para la compra de dos productos A y B, cuyos precios por unidad son, respectivamente, de \$3 y \$5.
  - a) Determinar la ecuación presupuestaria.
  - b) ¿Cuál es el máximo de unidades que puede comprar de A?
  - c) ¿Cuál es el máximo de unidades que puede comprar de B?

- d) Enumerar todas las posibles compras que puede hacer, gastando todo el presupuesto.
2. La ecuación presupuestaria para la compra de tres productos A, B y C de un consumidor es  $1200 = ax + 20y + cz$ , donde  $x$ ,  $y$  y  $z$  son las cantidades de unidades que compra de cada uno de ellos respectivamente. Sabiendo que la máxima cantidad de unidades de A que puede comprar es 40, y si compra 1 unidad de A, 2 de B y 5 de C gasta todo el presupuesto.
- a) Determinar los valores de  $a$  y de  $c$ .
- b) ¿Cuál es el máximo de unidades que puede comprar de B?

#### Soluciones

1. a) La ecuación presupuestaria es  $45 = 3x + 5y$ . Hacer el gráfico como ejercicio.
- b) La ecuación segmentaria es  $1 = \frac{x}{15} + \frac{y}{9}$ , luego, el máximo de unidades que puede comprar de A es 15.
- c) El máximo de unidades que se pueden comprar de B es 9.
- d) La ecuación explícita de la recta es  $y = -\frac{3}{5}x + 9$ . Las soluciones enteras del primer cuadrante son  $(0, 9)$ ,  $(5, 6)$ ,  $(10, 3)$  y  $(15, 0)$  (ver el dibujo sugerido en a).
2. a) La ecuación presupuestaria ahora es  $1200 = ax + 20y + cz$ . La máxima cantidad de unidades de A que puede comprar se obtiene cuando no compra nada de B y de C; luego,  $1200 = a * 40 + 20 * 0 + c * 0$ . Despejando,  $a = 30$ . Además, si compra 1 unidad de A, 2 de B y 5 de C gasta todo el presupuesto:  $1200 = 30 * 1 + 20 * 2 + c * 5$ , de donde  $c = 10$ .
- b) Sabemos ya que  $1200 = 30x + 20y + 10z$ . Podemos hacer  $x = 0$ ,  $z = 0$  y despejamos el máximo valor que puede tomar  $y$ , que es 6. En el caso de tres variables, también podemos escribir la ecuación presupuestaria como:  $1 = \frac{x}{40} + \frac{y}{6} + \frac{z}{12}$ , luego, el máximo de unidades que puede comprar de B es 6.