

Planos en \mathbb{R}^3

Consideremos el conjunto Π de todos los vectores $X \in \mathbb{R}^3$ ortogonales a $N = (1, -2, 4)$. Por la definición de ortogonalidad

$$X \perp N \iff \langle X, N \rangle = 0$$

Si escribimos $X = (x, y, z)$, la condición para que X esté en el conjunto Π es, entonces,

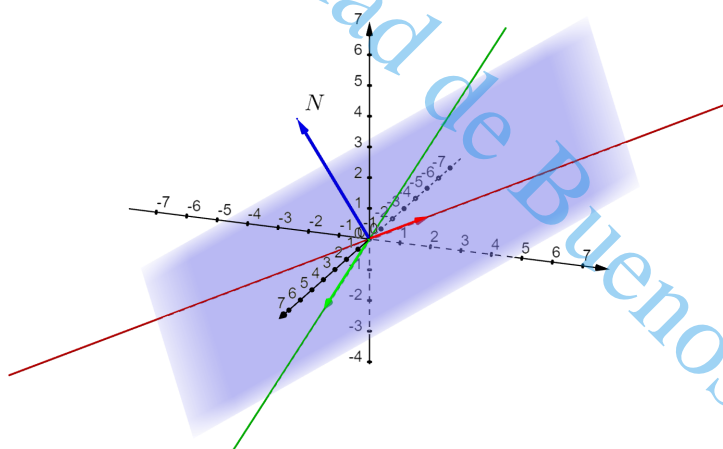
$$\langle X, N \rangle = \langle (x, y, z), (1, -2, 4) \rangle = x - 2y + 4z = 0$$

Luego el conjunto puede ser descrito como

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + 4z = 0\}$$

Notar que, como la condición para pertenecer a Π es solo una ecuación con tres incógnitas, el conjunto tendrá infinitos elementos. Podemos ver que, por ejemplo, $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 1)$ y $(4, 0, -1)$ están en Π . De hecho, todos los múltiplos de $(0, 2, 1)$ y todos los múltiplos de $(4, 0, -1)$ también están en Π .

Geoméricamente, este conjunto resulta ser el plano perpendicular a N y que pasa por el origen:



Si resolvemos la ecuación que define a Π , obtenemos otra descripción para sus elementos:

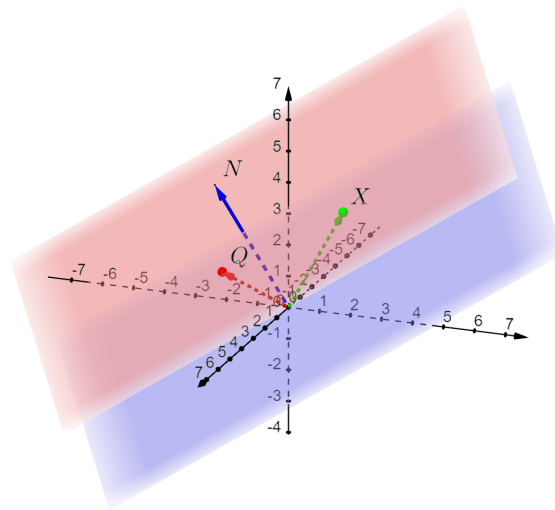
$$x - 2y + 4z = 0 \iff x = 2y - 4z$$

Luego, todos los elementos de Π son de la forma

$$(2y - 4z, y, z) = (2y, y, 0) + (-4z, 0, z) = y \cdot (2, 1, 0) + z \cdot (-4, 0, 1)$$

para valores de y y de z reales.

Si a todos los elementos de Π le sumamos $Q = (3, -1, 2)$ obtenemos el plano Π' paralelo a Π que pasa por Q :



Este plano puede describirse de la siguiente forma

$$\Pi' : \vec{X} = \alpha \cdot (2, 1, 0) + \beta \cdot (-4, 0, 1) + (3, -1, 2) \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

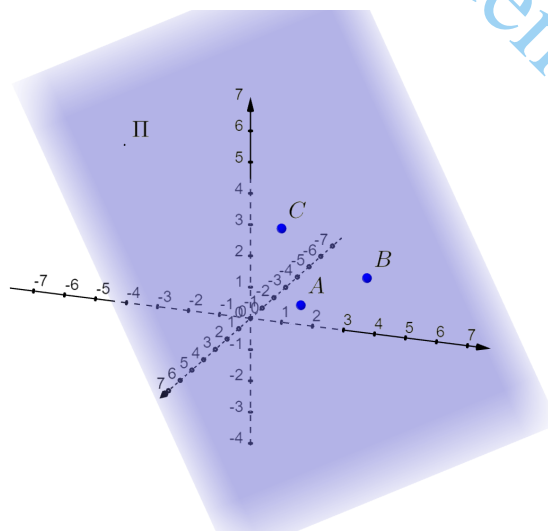
Observación. Cualquier plano Π en \mathbb{R}^3 puede describirse como todos los puntos de la forma

$$\vec{X} = \alpha \cdot v + \beta \cdot w + Q$$

donde v y w son dos vectores fijos que no son múltiplo uno del otro, Q es un punto de paso fijo y α y β pueden tomar valores reales cualesquiera. Esta ecuación para describir un plano se llama *ecuación paramétrica*.

Los vectores v y w son vectores dirección de rectas incluidas en el plano. Como hay infinitas rectas incluidas en un plano, hay infinitas direcciones que se pueden elegir. También hay infinitos puntos de paso, por lo tanto, la ecuación paramétrica de un plano no es única.

Dados A , B y C tres puntos no alineados en \mathbb{R}^3 determinan un único plano Π :



Una ecuación paramétrica para este plano es

$$\Pi: \vec{X} = \alpha \cdot (A - C) + \beta \cdot (B - C) + C$$

(notar que, cuando $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, $\vec{X} = C$, cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, $\vec{X} = A$ y cuando $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, $\vec{X} = B$.)

Definición. Se llama *vector normal* al plano

$$\Pi: \vec{X} = \alpha \cdot v + \beta \cdot w + Q$$

a cualquier vector no nulo z que es perpendicular al mismo tiempo a v y a w .

Para calcular un vector normal a Π se puede calcular el producto vectorial $v \times w$, o bien encontrar una solución no nula al sistema que queda cuando igualamos los dos productos escalares a cero.

Si el plano viene dado por una ecuación $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$, un vector normal resulta el vector $N = (a, b, c)$ (ya que cualquier vector director v del plano satisface $\langle (a, b, c), v \rangle = 0$).

Ejemplo. Hallar un vector N normal a

$$\Pi: \vec{X} = \alpha \cdot (4, 1, 0) + \beta \cdot (-2, 0, 1) + (8, 2, 2)$$

Un vector normal será un vector no nulo (x, y, z) que satisfaga simultáneamente

$$\langle (x, y, z), (4, 1, 0) \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle (x, y, z), (-2, 0, 1) \rangle = 0$$

Luego basta encontrar una solución no nula del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4x + y = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases}$$

En este caso, podemos encontrar una solución fácilmente fijando el valor de una de las variables: si $x = 1$, resulta que $y = -4$ y $z = 2$. Luego

Respuesta: un vector normal para Π es $N = (1, -4, 2)$.

Así como las rectas en el plano, los planos en el espacio también pueden darse por una ecuación implícita:

Definición. Dados un vector no nulo $N = (a, b, c)$ y un punto $Q = (q_1, q_2, q_3)$, el plano Π que es perpendicular a N y pasa por Q está dado por la ecuación

$$\Pi: ax + by + cz = aq_1 + bq_2 + cq_3$$

La ecuación $ax + by + cz = aq_1 + bq_2 + cq_3$ se llama un *ecuación implícita* del plano Π que pasa por Q y es perpendicular a N . Notar que esta ecuación se puede también escribir usando el producto escalar como

$$\Pi : \langle (x, y, z), N \rangle = \langle Q, N \rangle$$

Para el plano del ejemplo anterior

$$\Pi : \vec{X} = \alpha \cdot (4, 1, 0) + \beta \cdot (-2, 0, 1) + (8, 2, 2)$$

ya calculamos un vector normal (perpendicular) $N = (1, -4, 2)$. Por lo tanto, una ecuación implícita para Π será:

$$1 \cdot x + (-4) \cdot y + 2 \cdot z = 1 \cdot 8 + (-4) \cdot 2 + 2 \cdot 2 \iff x - 4y + 2z = 4$$

Observaciones

- Dado un plano Π por una ecuación implícita, se puede obtener una ecuación paramétrica simplemente encontrando las soluciones de la ecuación.
- Dado un plano Π por una ecuación paramétrica se puede obtener una ecuación implícita buscando primero un vector normal N a las dos direcciones dadas v y w . Si Q es un punto de paso, la ecuación resulta $\langle (x, y, z), N \rangle = \langle Q, N \rangle$.

Ejemplo. Dar una ecuación implícita del plano Π que pasa por los puntos $A = (1, 2, 1)$, $B = (-2, 3, 1)$ y $C = (0, 1, 3)$.

Solución: Una ecuación paramétrica del plano Π resulta ser

$$\Pi : \vec{X} = \alpha \cdot (A - C) + \beta \cdot (B - C) + C = \alpha \cdot (1, 1, -2) + \beta \cdot (-2, 2, -2) + (0, 1, 3)$$

Para encontrar un vector normal a las dos direcciones, podemos calcular su producto vectorial:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ (1, 0, 0) & (0, 1, 0) & (0, 0, 1) \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (0, 0, 1) + (-2) \cdot (-2) \cdot (0, 1, 0) + 1 \cdot (-2) \cdot (1, 0, 0) -$$

$$-(-2) \cdot (2) \cdot (1, 0, 0) - (-2) \cdot 1 \cdot (0, 1, 0) - 1 \cdot (-2) \cdot (0, 0, 1) = (2, 6, 4)$$

Con esta normal y alguno de los puntos, por ejemplo A , formamos la ecuación del plano

$$2x + 6y + 4z = \langle (2, 6, 4), (1, 2, 1) \rangle = 18$$

Respuesta: $\Pi : 2x + 6y + 4z = 18.$

En este caso es fácil verificar que los tres puntos pertenecen al plano dado por esta ecuación:

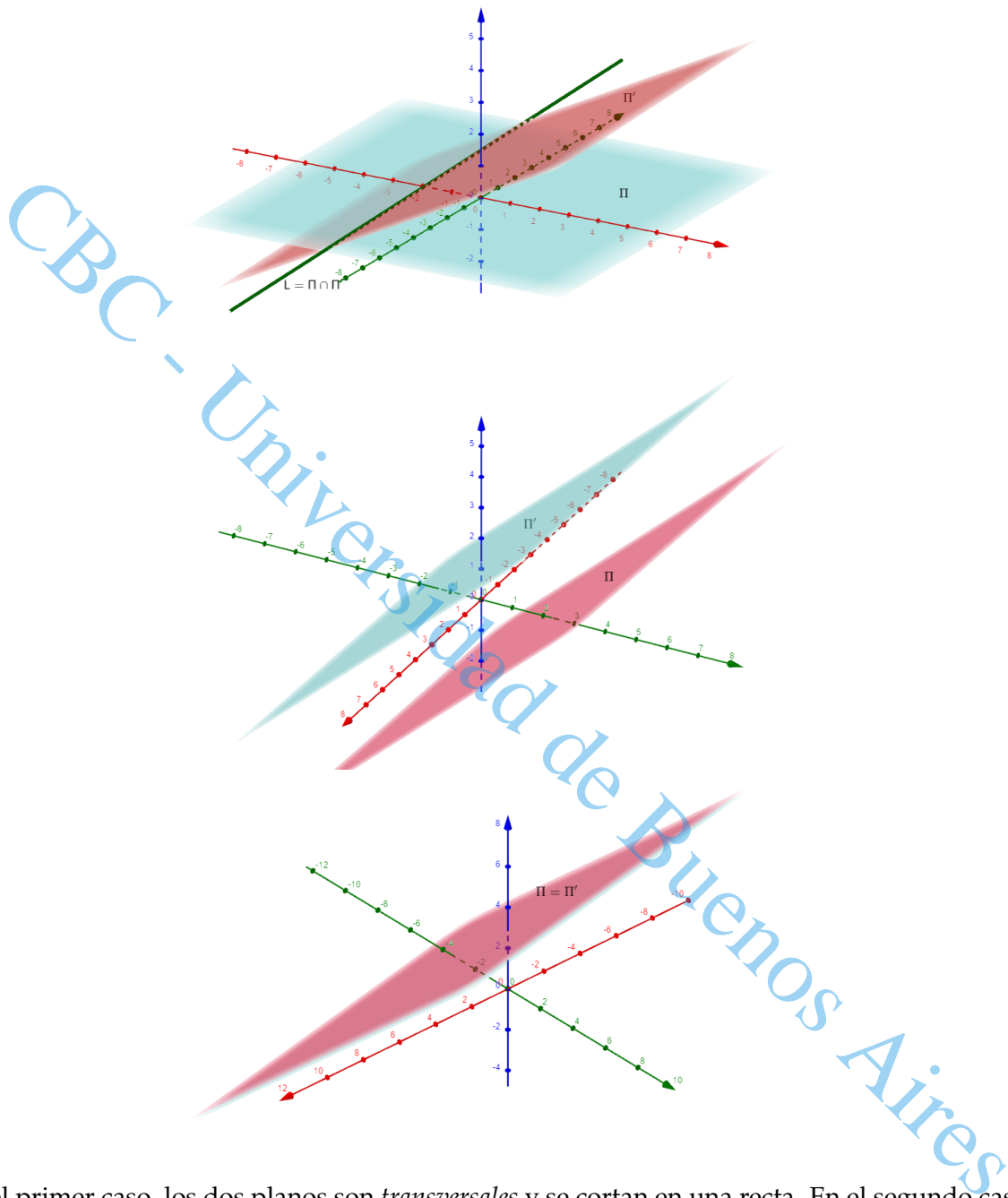
$$A \in \Pi : 2 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 18$$

$$B \in \Pi : 2(-2) + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 18$$

$$C \in \Pi : 2 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 18$$

Posiciones relativas

Dados dos planos Π y Π' en \mathbb{R}^3 pueden darse alguna de estas tres situaciones:



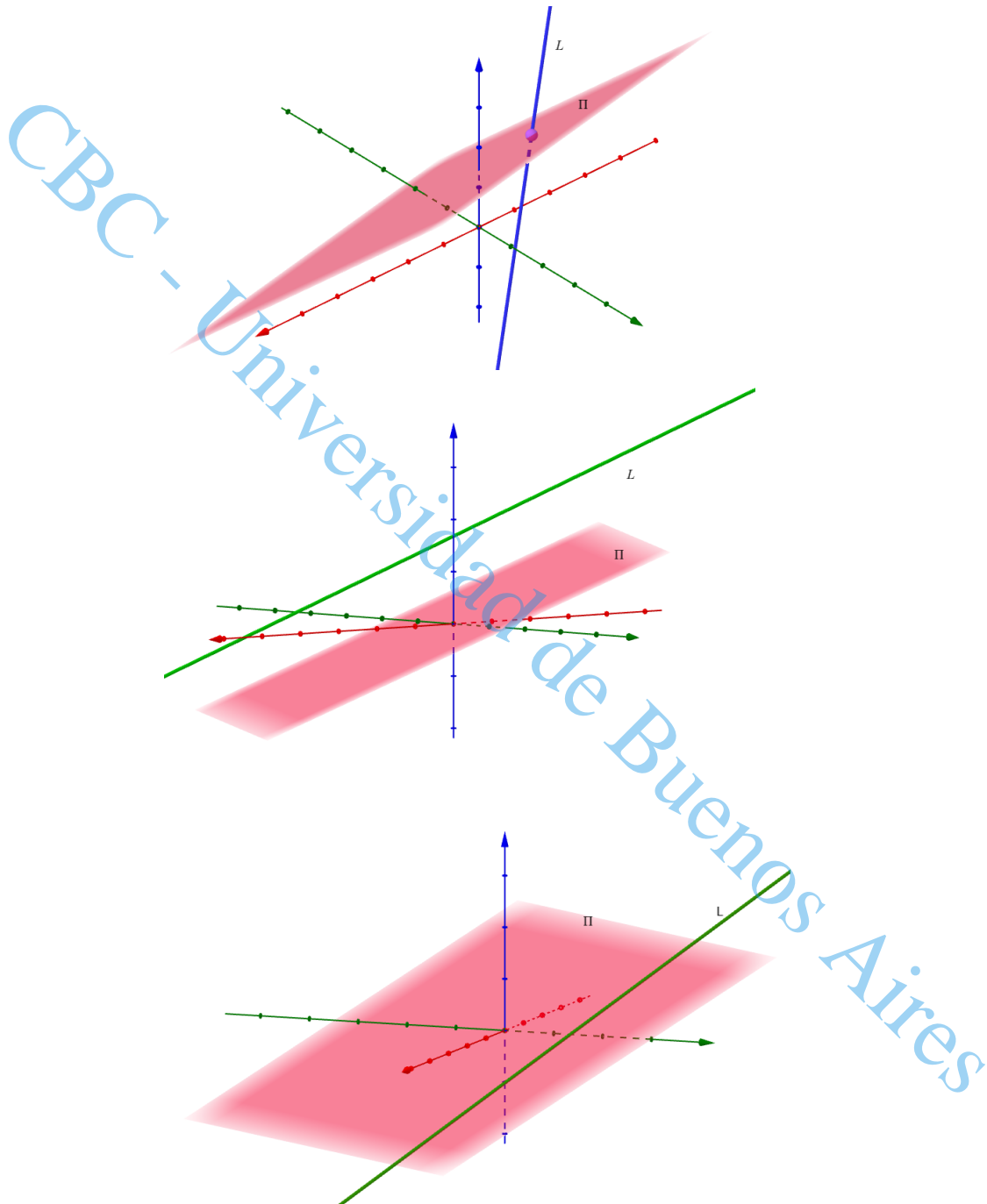
En el primer caso, los dos planos son *transversales* y se cortan en una recta. En el segundo caso, los dos planos son *paralelos no coincidentes* y en el tercer caso los dos planos son el mismo y se dicen *coincidentes* o *paralelos coincidentes*.

¿Cómo decidir en qué situación están dos planos dados?

- Si sus vectores normales **no** son múltiplos uno del otro, los planos no son paralelos y por lo tanto son transversales.

- Si sus vectores normales son múltiplos, son paralelos:
 - Si hay un punto en uno que no esté en el otro, no pueden ser el mismo plano, por lo tanto son paralelos no coincidentes
 - Si tienen un punto en común, no pueden no cortarse, entonces son coincidentes.

Dados un plano Π y una recta L en \mathbb{R}^3 , pueden darse alguna de estas tres situaciones:

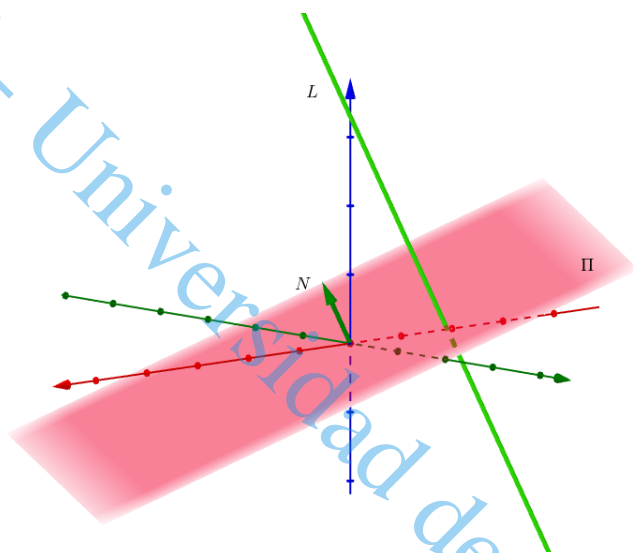


En el primer caso, la recta y el plano son *transversales* y se cortan en un punto. En el segundo caso, la recta y el plano son *paralelos* pero no se cortan y en el tercer caso la recta *está incluida* en el plano.

¿Cómo decidir en qué situación están una recta y un plano dados?

- Si un vector normal al plano **no** es perpendicular a la dirección de la recta, el plano y la recta son transversales.
- Si un vector normal al plano es perpendicular a la dirección de la recta son paralelos:
 - Si hay un punto de la recta que no esté en el plano, no puede estar incluida y, por lo tanto, son paralelos pero no se cortan.
 - Si un punto de la recta está en el plano, toda la recta resulta incluida en el plano.

Si además, la dirección de una recta L es un vector normal a un plano Π , se dice que el plano y la recta son *perpendiculares*:



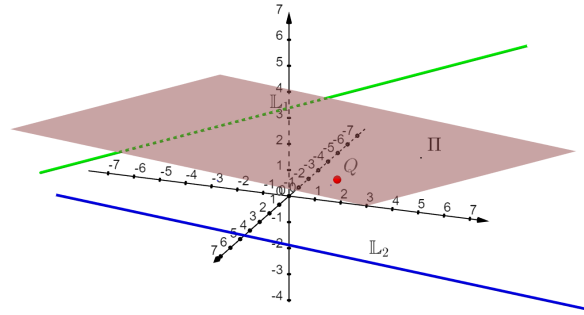
Ejemplo Dados el punto $A = (3, -4, -1)$ y la recta $L : \vec{X} = \lambda(-2, 0, 3) + (2, 3, -2)$, hallar una ecuación implícita para el plano Π perpendicular a L que pasa por A .

Solución: Como la recta tiene que ser perpendicular al plano, su vector director sirve como vector normal. Con $N = (-2, 0, 3)$, por ejemplo, y con el punto de paso A hallamos la ecuación del plano

$$\langle (x, y, z), (-2, 0, 3) \rangle = \langle (3, -4, -1), (-2, 0, 3) \rangle = -9$$

Respuesta: $\Pi : -2x + 3z = -9$.

Ejemplo Dadas las rectas $L_1 : \vec{X} = \lambda(1, 2, 1) + (0, -1, 3)$, $L_2 : \vec{X} = \lambda(2, -2, 1) + (3, 4, -1)$ y el punto $Q = (3, 3, 2)$, hallar la ecuación implícita de un plano Π paralelo a las dos rectas y que pase por Q .



Solución: Como las rectas tienen que ser paralelas al plano, sus direcciones deben ser ortogonales a la normal del plano. Entonces, el producto vectorial entre sus vectores directores nos da un vector normal.

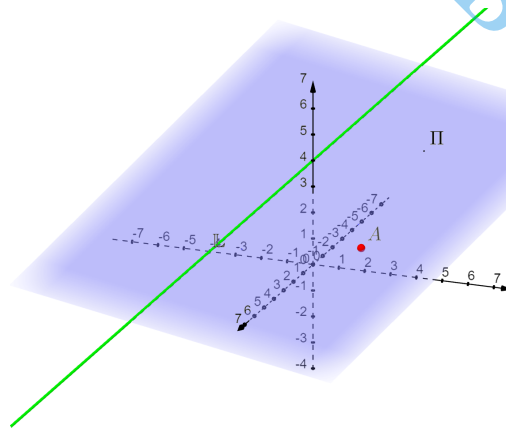
$$N = (1, 2, 1) \times (2, -2, 1) = (4, 1, -6)$$

y además, para que el plano pase por $Q = (3, 3, 2)$,

$$\langle (x, y, z), (4, 1, -6) \rangle = \langle (3, 3, 2), (4, 1, -6) \rangle$$

Respuesta: $\Pi : 4x + y - 6z = 3$

Ejemplo. Dados el punto $A = (1, -3, -4)$ y la recta $L : \vec{X} = \lambda(-2, 1, 1) + (3, -3, 1)$, hallar un plano Π que los contenga.



Solución: Para contener a la recta, alcanza con que el plano contenga a dos de sus puntos: por ejemplo

$$\text{con } \lambda = 0, B = 0(-2, 1, 1) + (3, -3, 1) = (3, -3, 1) \in L$$

con $\lambda = 1, C = 1(-2, 1, 1) + (3, -3, 1) = (1, -2, 2) \in L$

Como el plano también tiene que contener a A , el problema se reduce a encontrar el plano que pasa por los tres puntos A, B y C . Para hallarlo, procedemos como antes:

$$\Pi : \vec{X} = \alpha \cdot (A - C) + \beta \cdot (B - C) + C$$

Respuesta: $\Pi : \vec{X} = \alpha \cdot (0, -1, -6) + \beta \cdot (2, -1, -1) + (1, -2, 2)$.

Ecuaciones implícitas para rectas en \mathbb{R}^3

Una recta en \mathbb{R}^3 siempre puede pensarse como intersección de dos planos. Como cada plano puede darse por una ecuación implícita, la recta será la solución de un sistema de dos ecuaciones implícitas.

Por ejemplo: El conjunto de soluciones del sistema

$$S : \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 0 \\ y - 2z = 4 \end{cases}$$

son los puntos en común del plano dado por la primera ecuación y el plano dado por la segunda. El sistema tiene por soluciones a todos los vectores (x, y, z) tales que

$$y = 4 + 2z \quad y \quad x = \frac{2z - 3(4 + 2z)}{2} = -6 - 2z$$

Luego las soluciones del sistema son de la forma

$$(-6 - 2z, 4 + 2z, z) = z \cdot (-2, 2, 1) + (-6, 4, 0)$$

es decir, las soluciones son los puntos de la recta con dirección $(-2, 2, 1)$ y que pasa por el $(-6, 4, 0)$.

Ejemplo. Dar ecuaciones implícitas para la recta $L : \vec{X} = \alpha \cdot (1, 3, -2) + (5, -2, 1)$.

Solución: Los puntos de la recta son de la forma

$$(x, y, z) = (\alpha \cdot 1 + 5, \alpha \cdot 3 + (-2), \alpha \cdot (-2) + 1)$$

Es decir

$$x = \alpha \cdot 1 + 5 \quad y = \alpha \cdot 3 + (-2) \quad z = \alpha \cdot (-2) + 1$$

Podemos despejar α en las tres ecuaciones y queda

$$\alpha = x - 5 \quad \alpha = \frac{y + 2}{3} \quad \alpha = \frac{1 - z}{2}$$

Como el valor de α debe ser el mismo para las tres coordenadas, podemos igualarlos

$$x - 5 = \frac{y + 2}{3} \quad \frac{y + 2}{3} = \frac{1 - z}{2}$$

Operando obtenemos

$$3x - y = 17 \quad 2y + 3z = -1$$

que resultan ser dos ecuaciones implícitas para L .

Respuesta: $\begin{cases} 3x - y = 17 \\ 2y + 3z = -1 \end{cases}$ es un sistema de ecuaciones implícitas para L .

CBC - Universidad de Buenos Aires