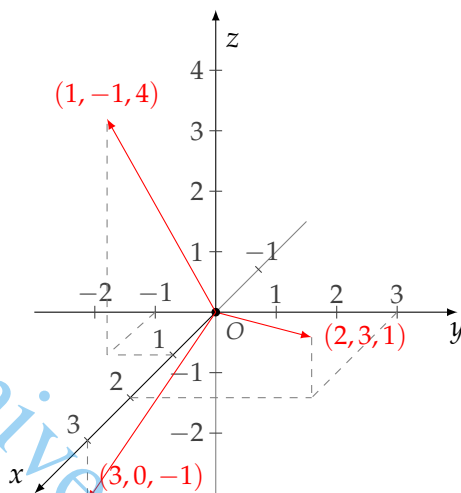


Vectores en el espacio

Los vectores en el espacio \mathbb{R}^3 (como los del plano) también tienen una interpretación geométrica:



Producto escalar y producto vectorial

Definición Dados dos vectores $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)$, se define el *producto escalar* o *interno* entre \vec{X} e \vec{Y} como el **número**:

$$\langle \vec{X}, \vec{Y} \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3.$$

Como en el plano, el producto escalar entre dos vectores da 0 si y sólo si los vectores son perpendiculares u ortogonales (es decir, forman un ángulo recto).

Ejemplos:

$$\langle (1, 2, -1), (3, 2, 4) \rangle = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 = 3 \text{ (luego los vectores no son perpendiculares).}$$

$$\langle (1, 2, -1), (3, 2, 7) \rangle = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 7 = 0 \text{ (luego los vectores son perpendiculares).}$$

Definición Dados dos vectores $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)$, se define el *producto vectorial* entre \vec{X} e \vec{Y} como el **vector**:

$$\vec{X} \times \vec{Y} = (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2, x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3, x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)$$

Regla mnemotécnica: lo que vamos a hacer sirve para recordar la forma del producto vectorial, pero no tiene sentido desde el punto de vista matemático:

$$\vec{X} \times \vec{Y} = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (1, 0, 0) & (0, 1, 0) & (0, 0, 1) \end{pmatrix}$$

El producto vectorial entre dos vectores da un tercer vector que cumple las siguientes dos propiedades:

- $\vec{X} \times \vec{Y}$ es un vector que es ortogonal a \vec{X} y a \vec{Y} simultáneamente.
- $\vec{X} \times \vec{Y} = \vec{0} \iff \vec{X}$ e \vec{Y} son colineales (es decir, uno es múltiplo del otro).

Ejemplo: Dados $A = (-2, 2, -1)$ y $B = (-3, 1, 4)$, calcular el producto $A \times B$.

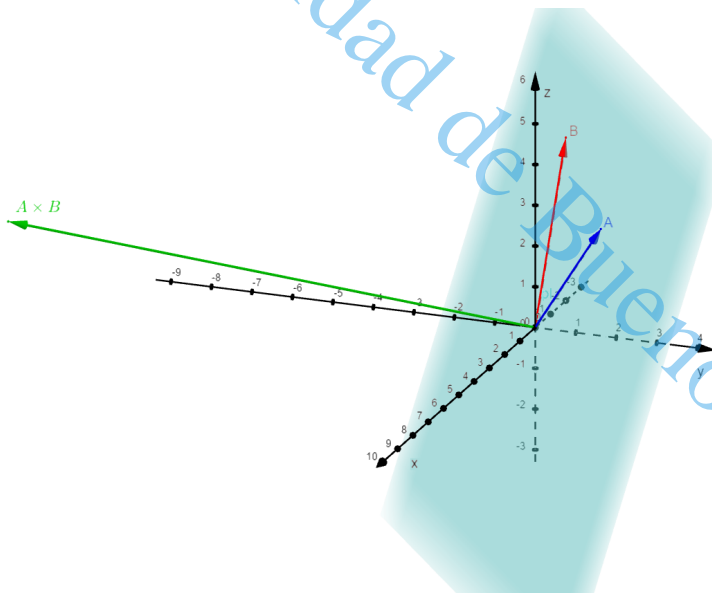
Solución: Siguiendo con nuestra regla mnemotécnica, calculemos el producto vectorial pedido

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \\ (1,0,0) & (0,1,0) & (0,0,1) \end{pmatrix} = -2 \cdot 1 \cdot (0,0,1) + (-3) \cdot (-1) \cdot (0,1,0) +$$

$$+ 2 \cdot 4 \cdot (1,0,0) - (-1) \cdot 1 \cdot (1,0,0) - 4 \cdot (-2) \cdot (0,1,0) - 2 \cdot (-3) \cdot (0,0,1) = (9, 11, 4)$$

Respuesta: $A \times B = (9, 11, 4)$.

Podemos ver cómo $A \times B$ es perpendicular a A y a B simultáneamente en el siguiente gráfico:



Ejemplo: Dados $A = (-2, 2, -1)$ y $C = (4, -4, 2)$, calcular el producto $A \times C$.

Solución: Como A y C son colineales (cada uno es múltiplo del otro), la propiedad anterior nos dice que el producto vectorial debe dar el vector $\vec{0}$. Verifiquémoslo haciendo la cuenta

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \\ (1,0,0) & (0,1,0) & (0,0,1) \end{pmatrix} = -2 \cdot (-4) \cdot (0,0,1) + 4 \cdot (-1) \cdot (0,1,0) + 2 \cdot 2 \cdot (1,0,0) -$$

$$-(-1) \cdot (-4) \cdot (1,0,0) - 2 \cdot (-2) \cdot (0,1,0) - 2 \cdot 4 \cdot (0,0,1) = (0,0,0)$$

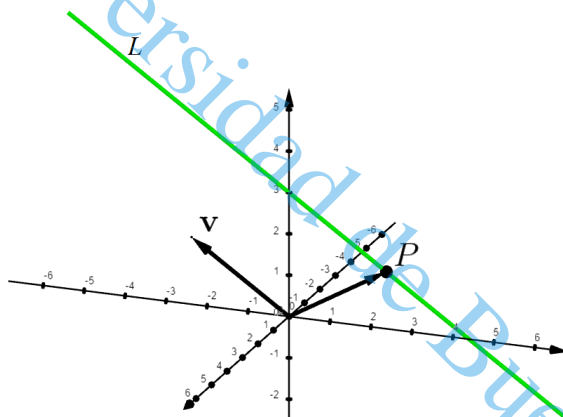
Respuesta: $A \times C = (0,0,0)$.

Rectas en \mathbb{R}^3

Al igual que en el plano, dados vectores v y P , el conjunto

$$L = \{ \vec{X} \in \mathbb{R}^3 / \vec{X} = k \cdot v + P \text{ con } k \in \mathbb{R} \}$$

resulta ser una recta con dirección v y que pasa por P .



Esta forma de describir una recta en \mathbb{R}^3 se llama, como en el plano, *ecuación paramétrica de la recta L*.

Como antes, podemos cambiar su vector dirección v por cualquier múltiplo no nulo de él y el vector P por cualquier otro punto de paso de la recta y obtendremos otra ecuación paramétrica para la misma recta. De esto podemos deducir que la ecuación paramétrica de una recta **no es única**.

Observación: Sean P y Q dos puntos distintos en \mathbb{R}^3 , la recta

$$L : \vec{X} = \alpha \cdot (P - Q) + Q$$

pasa por Q (reemplazando $\alpha = 0$) y por P (reemplazando $\alpha = 1$). Luego esta es una ecuación paramétrica para la única recta en \mathbb{R}^3 en que pasa por P y por Q .

Ejemplo. Hallar tres ecuaciones paramétricas distintas para la recta L que pasa por los puntos $P = (1, 0, 2)$ y $Q = (3, 3, 1)$.

Una ecuación posible para L es $\vec{X} = \alpha \cdot (P - Q) + Q$, es decir

$$L : \vec{X} = \alpha \cdot (-2, -3, 1) + (3, 3, 1).$$

Cualquier otra ecuación tendrá por vector dirección a un múltiplo de $(-2, -3, 1)$. Dando distintos valores a α en la ecuación anterior, obtenemos distintos puntos de paso de la recta. Por ejemplo, si $\alpha = 2$, el punto obtenido es $(-1, -3, 3)$ y si $\alpha = -3$, el punto obtenido es $(9, 12, -2)$. Por lo tanto otras ecuaciones para L pueden ser

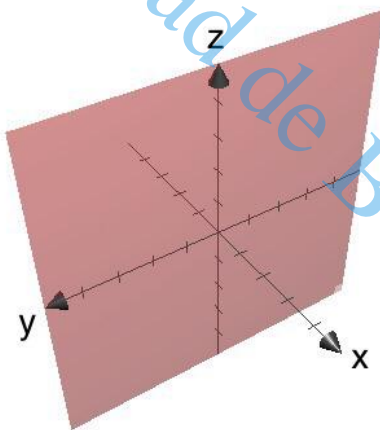
$$L : \vec{X} = \alpha \cdot (-4, -6, 2) + (-1, -3, 3).$$

$$L : \vec{X} = \alpha \cdot (10, 15, -5) + (9, 12, -2).$$

Definición: Dos rectas son *paralelas* si sus vectores dirección son múltiplos cada uno del otro. Dos rectas son *perpendiculares u ortogonales* si sus vectores dirección son perpendiculares (es decir, si el producto escalar de sus vectores dirección es 0)

Ejemplo: Hallar una recta L' perpendicular a la recta $L : \vec{X} = \alpha \cdot (-2, -3, 1) + (6, 3, 1)$ que la corte y que esté incluida en el plano coordenado yz .

El plano yz es el que determinan el eje y y el eje z :



Por lo tanto, los puntos del plano son los que tienen primera coordenada $x = 0$. Es decir la recta que buscamos debe tener todos sus puntos con primera coordenada 0.

El punto de intersección de las rectas debe tener entonces primera coordenada 0. Como los puntos de la recta L son de la forma $\alpha \cdot (-2, -3, 1) + (6, 3, 1)$, el punto de intersección será el definido por el valor de α que haga que $\alpha \cdot (-2) + 6 = 0$, es decir, $\alpha = 3$. Así, reemplazando, $L \cap L' = \{(0, -6, 4)\}$. Ya tenemos entonces un punto de paso de la recta L' .

Luego $L' : \vec{X} = \beta \cdot (0, a, b) + (0, -6, 4)$ (si el vector dirección no tuviese su primera coordenada nula, L' no estaría incluida en el plano yz).

La condición que nos falta pedir es que L y L' sean perpendiculares. Para eso, el producto interno de sus vectores dirección debe ser nulo.

$$\langle (0, a, b), (-2, -3, 1) \rangle = 0 \iff -3a + b = 0$$

Una solución para esta ecuación es $a = 1$ y $b = 3$. Luego

Respuesta: $L' : \vec{X} = \beta \cdot (0, 1, 3) + (0, -6, 4)$

Observar que si elegimos cualquier otra solución no nula de la ecuación $-3a + b = 0$, la dirección elegida será un múltiplo de $(0, 1, 3)$, así que nos dará la misma recta pero distinta ecuación paramétrica.

Posiciones relativas de dos rectas en \mathbb{R}^3 - Intersección

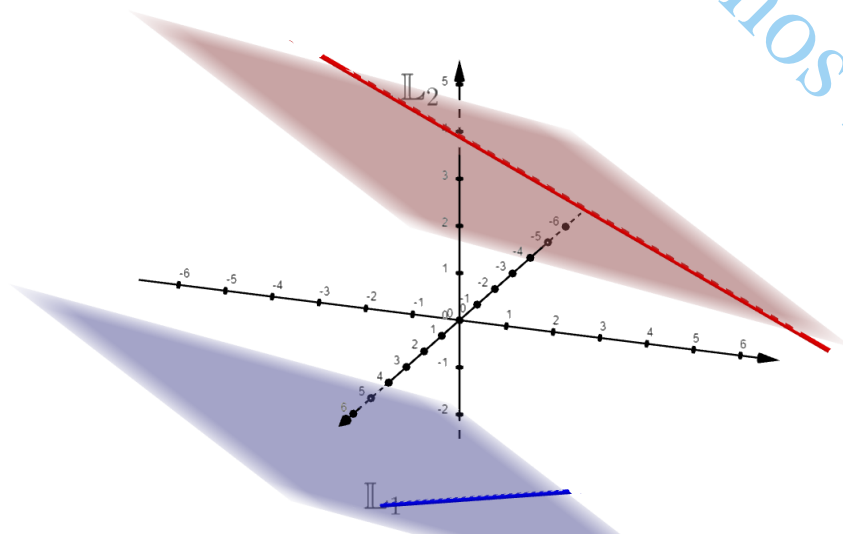
Como en el plano, dos rectas en el espacio se dirán *transversales* si se cortan en un único punto, *paralelas no coincidentes* si sus vectores dirección son múltiplos pero no tienen ningún punto en común y *coincidentes* (o *paralelas coincidentes*) si son la misma recta (es decir, si son paralelas y además tienen puntos en común).

En el espacio puede pasar una cuarta situación:

Consideremos las rectas $L : \vec{X} = \alpha \cdot (1, 0, 0) + (0, 1, 0)$ y $L' : \vec{X} = \beta \cdot (0, 0, 1) + (0, 2, 0)$. Por un lado, es evidente que las rectas no son paralelas pues sus vectores dirección $((1, 0, 0)$ y $(0, 0, 1))$ no son múltiplos. Por otro lado, todos los puntos de L tienen segunda coordenada 1 y todos los puntos de L' tienen segunda coordenada 2, por lo tanto no tienen puntos en común.

Definición Dos rectas en \mathbb{R}^3 que no son paralelas ni se cortan se dicen *alabeadas*.

En el siguiente gráfico, L_1 y L_2 son rectas alabeadas (no se cortan por estar ubicadas en planos paralelos, pero sus direcciones son distintas):



Ejemplo: Decidir la posición relativa de las rectas $L : \vec{X} = \alpha \cdot (2, 1, -3) + (-3, -1, 4)$ y $L' : \vec{X} = \beta \cdot (2, 1, -2) + (1, 1, -5)$.

Es evidente que estas rectas no son paralelas pues sus vectores dirección $(2, 1, -3)$ y $(2, 1, -2)$ no son múltiplos entre sí. Nos resta decidir si son transversales o alabeadas. Para eso, calculemos su intersección:

Un punto está en ambas rectas si existen α y β que satisfagan

$$\alpha \cdot (2, 1, -3) + (-3, -1, 4) = \beta \cdot (2, 1, -2) + (1, 1, -5)$$

Por lo tanto, se deben satisfacer simultáneamente

$$\begin{cases} 2\alpha - 3 = 2\beta + 1 \\ \alpha - 1 = \beta + 1 \\ -3\alpha + 4 = -2\beta - 5 \end{cases}$$

Para decidir si existen o no, podemos resolver el sistema

$$\begin{cases} 2\alpha - 2\beta = 4 \\ \alpha - \beta = 2 \\ -3\alpha + 2\beta = -9 \end{cases}$$

Usamos el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -9 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \rightarrow \frac{1}{2}F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -9 \end{array} \right) \\ & \begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + 3F_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Este sistema es compatible determinado y sus soluciones son $\beta = 3$ y $\alpha = 5$. Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones paramétricas, resulta que $L \cap L' = \{(7, 4, -11)\}$ y por lo tanto

Respuesta: L y L' son transversales

Si el sistema hubiese resultado incompatible, las rectas habrían sido alabeadas.