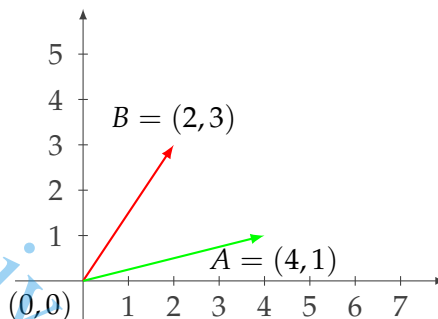


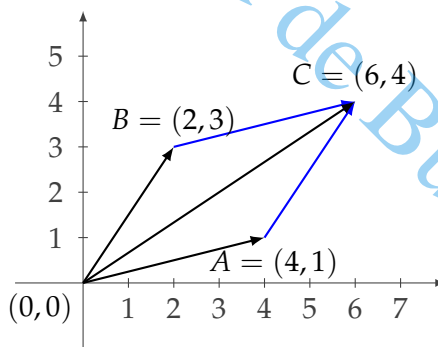
Vectores en el plano

Los vectores en el plano \mathbb{R}^2 (así como en el espacio \mathbb{R}^3) tienen una interpretación geométrica que nos permitirá estudiar un poco de geometría. En vez de considerar a un vector como un punto en el plano, lo interpretaremos como una flecha que comienza en el origen de coordenadas $(0,0)$ y termina en el punto dado por el vector.

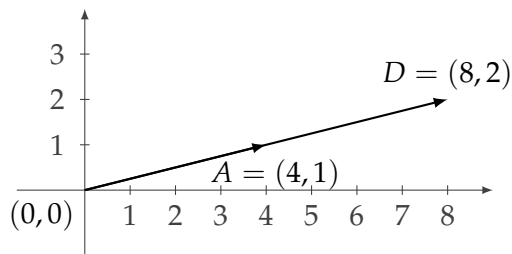
Por ejemplo, los vectores $A = (4,1)$ y $B = (2,3)$ se pueden interpretar de la siguiente forma:



Ya sabemos que $A + B = (4,1) + (2,3) = (6,4)$. Esta suma se puede interpretar mediante la llamada *regla del paralelogramo*: podemos construir geoméricamente el vector suma "copiando" en el extremo de cada vector al otro vector. Se construye así un un paralelogramo. La diagonal que comienza en el origen de coordenadas resulta ser el vector suma que llamamos C:



Similarmente, para multiplicar el vector $A = (4,1)$ por el escalar 2, si llamamos $D = 2 \cdot (4,1) = (8,2)$, gráficamente tenemos que el vector se "duplica":



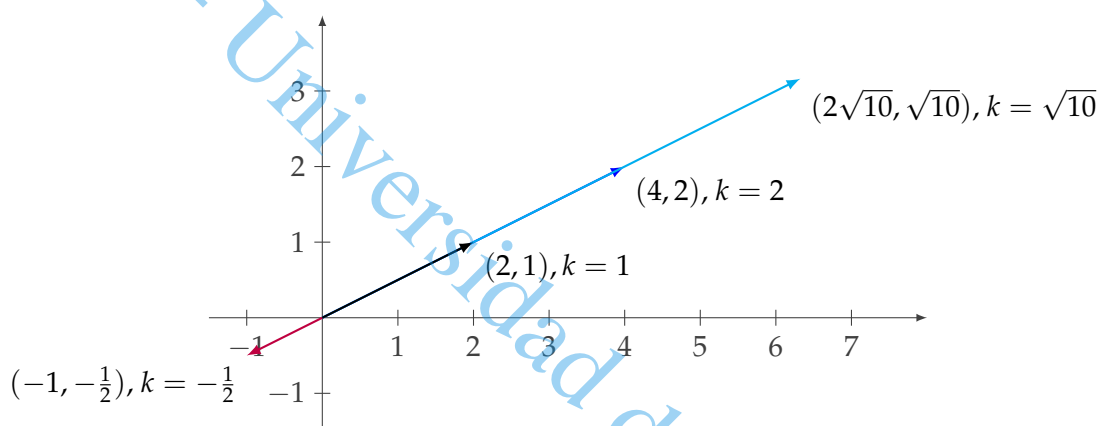
Observemos que al multiplicar un vector por un escalar el vector resultante tiene su misma dirección; sólo se modifican la longitud y el sentido (esto último, si el escalar es negativo). Es decir, todos los múltiplos de un vector dado quedan alineados.

Rectas en \mathbb{R}^2

Interpretemos geoméricamente al conjunto

$$L = \{ \vec{X} \in \mathbb{R}^2 / \vec{X} = k \cdot (2, 1) \text{ con } k \in \mathbb{R} \}$$

Como el producto de un escalar por un vector mantiene la dirección del vector, los múltiplos de un vector quedan alineados:



En este gráfico se muestran elementos de L para algunos valores de k . Para obtenerlos a todos, necesitamos usar todos los $k \in \mathbb{R}$. Así obtendremos todos los puntos de la recta dibujada.

El conjunto L es una recta con la dirección de $(2, 1)$ que pasa por el origen.

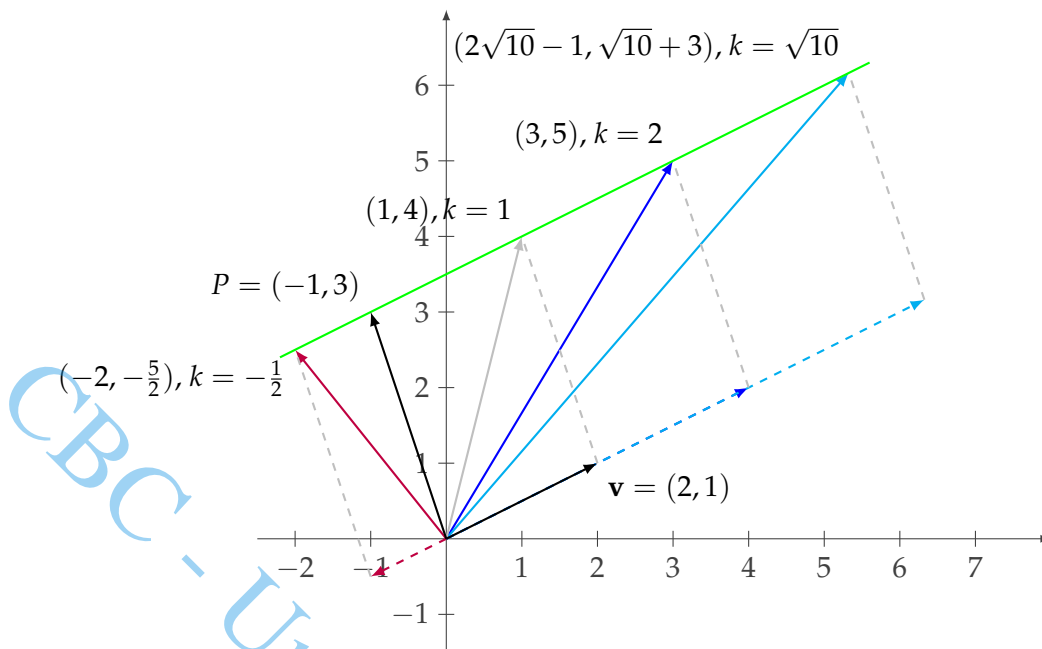
Definición: Dada la recta $L : \vec{X} = k \cdot v$, el vector v se llama un *vector dirección* de L . Notar que $v, 2v, -v$ y cualquier múltiplo no nulo de v resulta ser un vector dirección de la recta ya que los vectores de la recta son todos sus múltiplos también.

Si $v = (0, 0)$ es el vector nulo, el conjunto $\{ \vec{X} \in \mathbb{R}^2 / \vec{X} = k \cdot v, k \in \mathbb{R} \} = \{(0, 0)\}$ tiene por único elemento al origen y no es una recta.

Ahora, consideremos el siguiente conjunto:

$$L' = \{ \vec{X} \in \mathbb{R}^2 / \vec{X} = k \cdot (2, 1) + (-1, 3) \text{ con } k \in \mathbb{R} \}$$

Notar que los elementos de L' son los del conjunto L del ejemplo anterior sumados a $(-1, 3)$. Para representarlos en el plano, usamos la regla del paralelogramo:



Observar que los extremos de los vectores resultantes están alineados. El conjunto L' de todos los puntos de la forma $k \cdot (2, 1) + (-1, 3)$ con $k \in \mathbb{R}$ forma entonces una recta (en verde en el gráfico anterior), con la dirección de $(2, 1)$, que pasa por el punto $(-1, 3)$ (este punto se obtiene cuando $k = 0$).

Notar entonces que el conjunto $L' : \vec{X} = k \cdot (2, 1) + (-1, 3)$ es una recta. El vector $(2, 1)$ es un vector dirección de la recta, $(-1, 3)$ es un punto particular de la recta y k puede tomar cualquier valor real. Esta forma de describir una recta en \mathbb{R}^2 se llama *ecuación paramétrica de la recta L'* .

Si tomamos otro vector dirección (un múltiplo no nulo de $(2, 1)$) y otro punto de paso de la recta, obtenemos la misma recta pero dada por otra forma paramétrica

$$L' : \vec{X} = \alpha \cdot (4, 2) + (1, 4)$$

Observar que $(4, 2)$ es otro vector dirección ya que es un múltiplo no nulo de $(2, 1)$ y $(1, 4)$ es otro vector de la recta, que obtenemos reemplazando en la ecuación paramétrica original a k por 1: $1 \cdot (2, 1) + (-1, 3) = (1, 4)$.

De esto podemos deducir que la ecuación paramétrica de una recta **no es única**.

Observación: Sean P y Q dos puntos distintos en \mathbb{R}^2 , la recta $L : \vec{X} = \alpha \cdot (P - Q) + Q$ pasa por Q (reemplazando $\alpha = 0$) y por P (reemplazando $\alpha = 1$). Luego esta es una ecuación paramétrica para la única recta que pasa por P y por Q .

Ejemplo. Hallar una ecuación paramétrica para la recta L que pasa por los puntos $P = (1, 2)$ y $Q = (3, 3)$.

Respuesta: Una ecuación paramétrica para L es $L : \vec{X} = k \cdot (-2, -1) + (3, 3)$.

Como ya vimos, la respuesta a este problema no es única. Podemos elegir otros vectores dirección para esta recta $((4, 2)$ o $(-6, -3)$ o cualquier otro múltiplo no nulo de $(-2, -1)$) y también otros puntos de la recta $((1, 2), (5, 4)$ que es punto que corresponde a $k = -1$ o cualquier otro punto de la forma $k \cdot (-2, -1) + (3, 3)$.

Ejemplo. Decidir si los puntos $Q = (5, 4)$ y $R = (7, -2)$ pertenecen a la recta

$$L: \vec{X} = \lambda \cdot (2, 1) + (1, 2)$$

Solución: Los puntos de \mathbb{R}^2 que pertenecen a la recta son aquellos que se obtienen de la ecuación paramétrica para algún valor $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, para que se cumpla la condición $Q \in L$, debe existir algún valor particular de λ con el que se verifique la igualdad

$$\begin{aligned} (5, 4) &= \lambda \cdot (2, 1) + (1, 2) \\ &= (2 \cdot \lambda, 1 \cdot \lambda) + (1, 2) \\ &= (2 \cdot \lambda + 1, 1 \cdot \lambda + 2) \end{aligned}$$

Se deben cumplir simultáneamente

$$5 = 2 \cdot \lambda + 1 \quad \text{y} \quad 4 = 1 \cdot \lambda + 2$$

Despejando en la primera ecuación obtenemos $\lambda = 2$.

Reemplazando en la otra, $4 = 1 \cdot 2 + 2$, vemos que se verifica, luego el punto $Q \in L$

Para el punto R , el mismo procedimiento nos lleva a buscar otro valor de λ tal que

$$(7, -2) = (2 \cdot \lambda + 1, 1 \cdot \lambda + 2)$$

Se deben cumplir ahora simultáneamente

$$7 = 2 \cdot \lambda + 1 \quad \text{y} \quad -2 = 1 \cdot \lambda + 2$$

Despejando en la primera ecuación obtenemos $\lambda = 3$.

Reemplazando en la otra, obtenemos $-2 = 1 \cdot 3 + 2$ que es un absurdo. En este caso no hay un valor de λ para la ecuación paramétrica con el que se obtengan las coordenadas del punto R y por lo tanto R no pertenece a la recta L .

Respuesta: $Q \in L$ y $R \notin L$

Hay otra forma de definir rectas en el plano: Una *ecuación implícita* para una recta en \mathbb{R}^2 es una ecuación de la forma

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

con a, b y c números fijos, a y b no simultáneamente nulos.

Por ejemplo, la recta $L = \{(x, y) / 2x + y = 7\}$ es la recta que cumple la ecuación $y = -2x + 7$, es decir el gráfico de la función lineal $f(x) = -2x + 7$.

Siempre que en la ecuación $a \cdot x + b \cdot y = c$ el valor de b no sea cero, podemos despejar y y la recta resulta ser el gráfico de la función lineal $f(x) = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Si $b = 0$, la recta es vertical y su ecuación es $x = \frac{c}{a}$.

Ejemplo. Hallar un ecuación paramétrica para la recta $L = \{(x, y) / 2x + y = 7\}$.

Solución: En una ecuación implícita de una recta, siempre podemos despejar por lo menos una de las variables. Despejemos por ejemplo la variable y :

$$2x + y = 7 \iff y = 7 - 2x$$

Luego, los puntos de la recta tienen, para un valor fijo de x , la forma

$$(x, 7 - 2x) = (x, -2x) + (0, 7) = x \cdot (1, -2) + (0, 7)$$

Esta última forma de escribir a los puntos de la recta es una ecuación paramétrica de L :

Respuesta: $L : \vec{X} = \lambda \cdot (1, -2) + (0, 7)$

Si hubiésemos elegido despejar y quedaría:

$$2x + y = 7 \iff 2x = 7 - y \iff x = \frac{7 - y}{2}$$

Luego, los puntos de la recta tienen, para un valor fijo de y , la forma

$$\left(\frac{7 - y}{2}, y\right) = \left(\frac{7}{2} - \frac{y}{2}, y\right) = \left(-\frac{y}{2}, y\right) + \left(\frac{7}{2}, 0\right) = y \cdot \left(-\frac{1}{2}, 1\right) + \left(\frac{7}{2}, 0\right)$$

y la ecuación paramétrica de L que obtenemos ahora es:

Respuesta: $L : \vec{X} = \alpha \cdot \left(-\frac{1}{2}, 1\right) + \left(\frac{7}{2}, 0\right)$

Notar que los vectores dirección de las dos ecuaciones son múltiplos entre sí: $-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}, 1\right) = (1, -2)$ y los dos puntos sumados son puntos de la recta (basta reemplazar en la ecuación original para ver que la satisfacen).

Ejemplo. Hallar un ecuación implícita para la recta $L : \vec{X} = \lambda \cdot (2, 1) + (3, 4)$

Solución: Los puntos de esta recta son de la forma

$$(x, y) = \lambda \cdot (2, 1) + (3, 4) = (\lambda \cdot 2, \lambda \cdot 1) + (3, 4) = (\lambda \cdot 2 + 3, \lambda \cdot 1 + 4)$$

Por lo tanto $x = \lambda \cdot 2 + 3$ e $y = \lambda \cdot 1 + 4$. Si despejamos el valor de λ en ambas ecuaciones e igualamos obtenemos

$$x = \lambda \cdot 2 + 3 \iff x - 3 = \lambda \cdot 2 \iff \frac{x - 3}{2} = \lambda$$

$$y = \lambda \cdot 1 + 4 \iff y - 4 = \lambda$$

Por lo tanto,

$$\frac{x - 3}{2} = y - 4 \iff x - 3 = 2y - 8 \iff x - 2y = -5$$

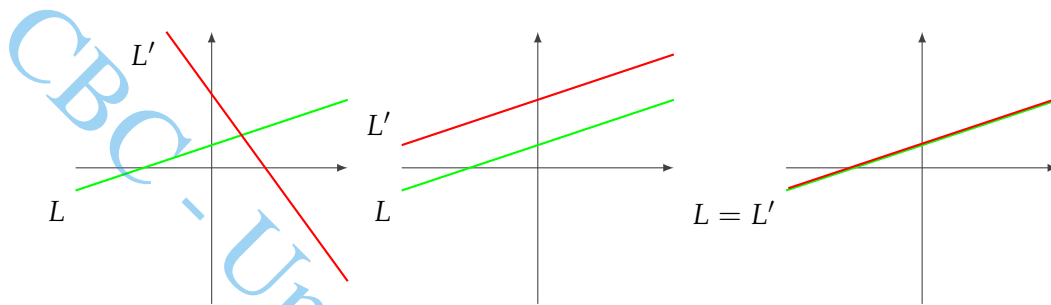
y esta última resulta ser una ecuación implícita para L .

$$\text{Respuesta: } L = \{(x, y) / x - 2y = -5\}$$

Observar que si multiplicamos la ecuación obtenida por cualquier escalar no nulo (por ejemplo, $5x - 10y = -25$) obtenemos otra ecuación implícita para L .

Posiciones relativas de dos rectas en \mathbb{R}^2 - Intersección

Dadas dos rectas L y L' , pueden ubicarse en el plano en alguna de las siguientes formas:



En el primer caso, en el que las rectas se cortan en un único punto, decimos que las rectas son **transversales**. En el segundo, en el que sus direcciones coinciden pero no tienen puntos en común decimos que son **paralelas no coincidentes** y en el tercero, donde las dos rectas son iguales se dicen **coincidentes** (o **paralelas coincidentes**).

Si las rectas vienen dadas por ecuaciones implícitas, su posición relativa está dada por la cantidad de soluciones del sistema de ecuaciones: en el primer caso el sistema será compatible determinado (solución única), en el segundo incompatible (sin soluciones) y en el tercero compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Si las rectas vienen dadas por ecuaciones paramétricas, serán paralelas (coincidentes o no) si y sólo si sus vectores dirección son múltiplos entre sí.

Por ejemplo

- Las rectas $L : \vec{X} = \lambda \cdot (1, -2) + (0, 7)$ y $L' : \vec{X} = \alpha \cdot (3, -1) + (5, 2)$ no son paralelas porque sus vectores dirección $((1, -2)$ y $(3, -1))$ no son múltiplos entre sí. Por lo tanto deben ser transversales.

Hallemos su punto de intersección:

Un punto pertenece a las dos rectas simultáneamente si se escribe al mismo tiempo como $\lambda \cdot (1, -2) + (0, 7)$ y como $\alpha \cdot (3, -1) + (5, 2)$ para ciertos números λ y α . Igualando tenemos que

$$\lambda \cdot (1, -2) + (0, 7) = \alpha \cdot (3, -1) + (5, 2) \iff (\lambda \cdot 1 + 0, \lambda \cdot (-2) + 7) = (\alpha \cdot 3 + 5, \alpha \cdot (-1) + 2)$$

Igualando coordenada a coordenada tenemos que

$$\begin{cases} \lambda = 3\alpha + 5 \\ -2\lambda + 7 = -\alpha + 2 \end{cases}$$

Es decir que α y λ son soluciones del sistema

$$\begin{cases} \lambda - 3\alpha = 5 \\ -2\lambda + \alpha = -5 \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema, obtenemos que $\lambda = 2$ y $\alpha = -1$: Luego reemplazando por el valor de λ o el de α en la ecuación correspondiente, tenemos que $L \cap L' = \{(2,3)\}$.

- Las rectas L y L' dadas por las ecuaciones $3x + 2y = 4$ y $6x + 4y = 5$ son paralelas no coincidentes ya que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 6x + 4y = 5 \end{cases}$$

es incompatible:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{array} \right) F_2 - 2F_1 \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

- ¿Cuál es la posición relativa de las rectas $L : \vec{X} = \lambda \cdot (1, -2) + (0,7)$ y $L' : 2x + 3y = 1$? Busquemos la intersección de las rectas para decidirlo.

Un punto está en L si se escribe como

$$(\lambda, \lambda \cdot (-2) + 7)$$

Para estar en L' , este punto debe cumplir la ecuación correspondiente, luego

$$2 \cdot \lambda + 3 \cdot (\lambda \cdot (-2) + 7) = 1 \iff -4 \cdot \lambda = -20 \iff \lambda = 5$$

Luego, $L \cap L' = \{(5, -3)\}$ y por lo tanto, las rectas resultan transversales.

Producto interno o escalar - Perpendicularidad

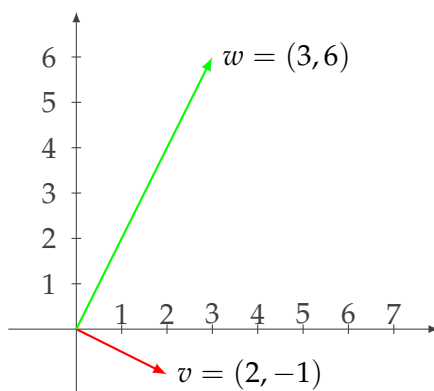
Dados dos vectores $v = (a, b)$ y $w = (c, d)$ se define el *producto interno o escalar* de v y w como

$$\langle v, w \rangle = \langle (a, b), (c, d) \rangle = a \cdot c + b \cdot d.$$

Este número se relaciona con el ángulo que forman los vectores v y w .

Propiedad: las direcciones de v y w son *perpendiculares u ortogonales* (es decir, forman un ángulo recto) si y sólo si $\langle v, w \rangle = 0$

Por ejemplo, $\langle (2, -1), (3, 6) \rangle = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 6 = 0$



Dos rectas se dicen *perpendiculares u ortogonales* si sus direcciones lo son.

Ejemplo. Hallar una ecuación paramétrica para la recta L' que pasa por $P = (1, -3)$ y es perpendicular a

$$L : \vec{X} = \lambda \cdot (2, 3) + (-4, 1)$$

Solución: Nuevamente el enunciado nos muestra un punto de paso para la recta buscada: $P = (1, -3)$. Para hallar una ecuación paramétrica, sólo nos falta encontrar un vector director perpendicular a $(1, -3)$.

Si llamamos $v = (v_1, v_2)$ a un vector director de L' , se deberá cumplir

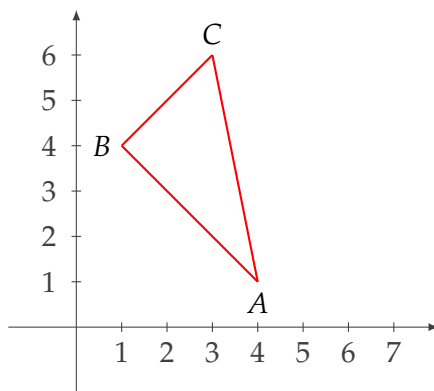
$$v \perp (2, 3) \iff \langle (v_1, v_2), (2, 3) \rangle = 2v_1 + 3v_2 = 0$$

Una de las soluciones de esta ecuación es $v_1 = 3$ y $v_2 = -2$, es decir, $v = (3, -2)$ es un posible vector director para L' . Por lo tanto, la recta que buscamos tiene entonces la ecuación paramétrica:

Respuesta: $L' : \vec{X} = \lambda \cdot (3, -2) + (1, -3)$

Ejemplo. Decidir si el triángulo de vértices $A = (4, 1)$, $B = (1, 4)$ y $C = (3, 6)$ es rectángulo en el vértice B .

Solución: Hagamos un gráfico para entender la situación:



Decidir si el ángulo en el vértice B es recto es lo mismo que decidir si la recta L que pasa por B y A y la recta L' que pasa por B y C son perpendiculares.

Una dirección de L es $B - A = (1,4) - (4,1) = (-3,3)$. Una dirección de L' es $B - C = (1,4) - (3,6) = (-2,-2)$.

Calculemos el producto interno entre las dos direcciones:

$$\langle (-3,3), (-2,-2) \rangle = (-3) \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) = 6 - 6 = 0$$

Como el producto interno da 0, las direcciones son perpendiculares y entonces

Respuesta: El triángulo ABC es rectángulo en B .

CBC - Universidad de Buenos Aires