Determinantes

Ya vimos la utilidad de decidir si una matriz cuadrada es inversible o no cuando trabajamos con sistemas de ecuaciones lineales: un sistema lineal es compatible determinado (tiene solución única) si y sólo si la matriz cuadrada del sistema es inversible. Hallar la inversa de una matriz puede involucrar muchos cálculos; sin embargo, existe una forma de decidir si una matriz cuadrada es inversible o no haciendo una cuenta con sus coeficientes y sin necesidad de calcular su inversa.

Definición: Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, se define el *determinante* de A como el número

$$\det(A) = a \cdot d - b \cdot c.$$

Notar que el determinante de una matriz de 2×2 se obtiene entonces calculando el producto de los elementos en cada una de sus diagonales y restándolos:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \cdot d - b \cdot c.$$

Ejemplos:

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-5) = 6 + 5 = 11$$

$$\det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = (-2) \cdot (-3) - 1 \cdot 6 = 6 - 6 = 0$$

Esta noción también existe para matrices de 3×3:

Definición: Dada $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, se define el *determinante* de A como el número

$$\det(A) = a \cdot e \cdot i + d \cdot h \cdot c + g \cdot b \cdot f - c \cdot e \cdot g - f \cdot h \cdot a - i \cdot b \cdot d.$$

Una regla práctica para acordarse de esta fórmula es la llamada *Regla de Sarrus*. Se copia la matriz A y se repiten debajo sus dos primeras filas:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

Se consideran los productos de los elementos en las “diagonales” de izquierda a derecha:

$$\left|\begin{array}{ccc} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\\ a & b & c\\ d & e & f\end{array}\right| \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \to a\cdot e\cdot i\\ \to d\cdot h\cdot c\\ \to g\cdot b\cdot f\end{array}$$

y estos tres términos van con signo $+$ en la fórmula.
Luego se consideran los productos de los elementos en las “diagonales” de derecha a izquierda:

$$\begin{array}{r} \\ \\ c\cdot e\cdot g \leftarrow\\ f\cdot h\cdot a \leftarrow\\ i\cdot b\cdot d \leftarrow\end{array} \qquad \left|\begin{array}{ccc} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\\ a & b & c\\ d & e & f\end{array}\right|$$

y estos tres términos van con signo $-$ en la fórmula, y así obtenemos los 6 términos que aparecen.

Ejemplo: Calcular

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2\\ 0 & -5 & 6\\ 3 & 2 & -4\end{pmatrix}.$$

Escribamos la matriz auxiliar con las dos primeras filas copiadas:

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 2\\ 0 & -5 & 6\\ 3 & 2 & -4\\ 3 & 1 & 2\\ 0 & -5 & 6\end{array}\right|$$

Luego el determinante pedido es

$$3\cdot(-5)\cdot(-4)+0\cdot 2\cdot 2+3\cdot 1\cdot 6-2\cdot(-5)\cdot 3-6\cdot 2\cdot 3-(-4)\cdot 1\cdot 0 = 60+0+18+30-36+0=72.$$

Existe una definición de determinante para matrices cuadradas de cualquier tamaño pero sólo trabajaremos con matrices de 2×2 y de 3×3.

Dos propiedades de los determinantes que pueden ser útiles son las siguientes:

- Si A y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$.
- Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $k\in\mathbb{R}$, $\det(k\cdot A) = k^n\cdot\det(A)$.

Notar que es falso que el determinante de la suma es la suma de los determinantes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

pero

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

y

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

La siguiente propiedad nos permite decidir si una matriz es inversible sin necesidad de calcular su inversa:

Propiedad. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es inversible si y sólo si su determinante es distinto de 0.

Ejemplo: Determinar los valores de k para que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & k & 2 \\ 0 & k & 2 \\ 1 & 2 & 3k-4 \end{pmatrix}$$

sea inversible.

Por la propiedad anterior, la matriz será inversible si y sólo si su determinante no es 0. Calculemos entonces su determinante y veamos cuándo da 0 y cuándo no.
La matriz auxiliar para aplicar la Regla de Sarrus es

$$\begin{vmatrix} 3 & k & 2 \\ 0 & k & 2 \\ 1 & 2 & 3k-4 \\ 3 & k & 2 \\ 0 & k & 2 \end{vmatrix}$$

y el determinante resulta

$$\det(A) = 3\cdot k\cdot(3k-4) + 0\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot k\cdot 2 - 2\cdot k\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 3 - (3k-4)\cdot k\cdot 0 =$$

$$= 9k^2 - 12k + 2k - 2k - 12 = 9k^2 - 12k - 12.$$

Esta expresión es 0 si y sólo si $k = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 4\cdot 9\cdot(-12)}}{2\cdot 9} = \dfrac{12 \pm 24}{18}$.
Luego, la matriz A resulta inversible si y sólo si $k \neq 2$ y $k \neq -\frac{2}{3}$.

En el ejemplo que sigue, veremos cómo aprovechar la información que dan los determinantes para clasificar sistemas paramétricos:

Ejemplo: Clasificar el siguiente sistema lineal de ecuaciones de acuerdo a los distintos valores de k:

$$S: \begin{cases} 3x_1 + kx_2 + 2x_3 = 7 \\ kx_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + (3k-4)x_3 = 5 \end{cases}$$

Ya sabemos que el sistema es compatible determinado (tiene solución única) si y sólo si la matriz asociada al sistema es inversible.

La matriz asociada al sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & k & 2 \\ 0 & k & 2 \\ 1 & 2 & 3k-4 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo anterior, ya vimos usando determinantes, que esta matriz es inversible si y sólo si $k \neq 2$ y $k \neq -\frac{2}{3}$. Por lo tanto ya tenemos una primera clasificación:

> El sistema S es compatible determinado si y sólo si $k \neq 2$ y $k \neq -\frac{2}{3}$.

Ahora nos falta ver qué pasa para $k = -\frac{2}{3}$ y para $k = 2$.

Si $k = -\frac{2}{3}$ la matriz ampliada del sistema resulta

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -\frac{2}{3} & 2 & 7 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right)$$

Utilicemos el método de Gauss-Jordan en este caso para decidir qué pasa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -\frac{2}{3} & 2 & 7 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -6 & 5 \end{array}\right) \quad F_1 \leftrightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & 5 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 2 & 4 \\ 3 & -\frac{2}{3} & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$$F_3 - 3F_1 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & 5 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 2 & 4 \\ 0 & -\frac{20}{3} & 20 & -8 \end{array}\right) \quad F_3 - 10F_2 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & 5 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -48 \end{array}\right)$$

En este caso, tenemos que la matriz del sistema tiene rango 2 pero la matriz ampliada tiene rango 3, por lo tanto el sistema no tiene solución (otra forma de razonar es notar que la última ecuación se transformó en $0 = -48$, que es un absurdo).

> El sistema S es incompatible para $k = -\frac{2}{3}$.

Si $k = 2$ la matriz ampliada del sistema resulta

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Utilicemos nuevamente el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right) \qquad F_1 \leftrightarrow F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$$F_3 - 3F_1 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \end{array}\right) \qquad F_3 + 2F_2 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En este caso, tenemos que la matriz del sistema y la matriz ampliada tienen ambas rango 2, por lo tanto el sistema tiene soluciones. Como sabemos que para $k = 2$ la solución no puede ser única, tendrá infinitas soluciones, y entonces:

El sistema S es compatible indeterminado para $k = 2$.