Inversa de una matriz

Recordemos que, como ya hemos visto, el sistema de ecuaciones

$$S:\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 9x_3 & = & 4 \end{array}\right.$$

puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Es decir, podemos escribir al sistema como $A \cdot X = Y$ donde, en este caso, $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, X e $Y \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ y las incógnitas son los coeficientes de la matriz X. Si estuviésemos trabajando con números, para despejar X pasaríamos A dividiendo... Pero ¿se podrá hacer esto con matrices?

Definición: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (notar que A es una matriz cuadrada) se dice *inversible* si existe una matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (del mismo tamaño) que satisface

$$B \cdot A = A \cdot B = I_n$$

(donde I_n es la matriz identidad de n filas y n columnas). En caso afirmativo, en lugar de B escribimos A^{-1} para notar a la *inversa* de A.

Si en nuestro sistema anterior escrito en forma matricial, la matriz A fuese inversible, podemos multiplicar a izquierda de ambos miembros por A^{-1} y obtenemos

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot Y \iff I_n \cdot X = A^{-1} \cdot Y$$

y como multiplicar por la matriz identidad no modifica a la matriz tenemos que

$$X = A^{-1} \cdot Y$$

es decir, despejamos las incógnitas X.

A continuación , veamos cómo calcular la inversa de una matriz (si existe):

Ejemplo 1. Hallar, si existe, la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución. Planteamos

$$A \cdot B = I_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este igualdad se puede pensar como dos sistemas lineales:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como para los dos sistemas la matriz asociada al sistema es la misma, podemos resolverlos usando el método de Gauss-Jordan simultáneamente (las dos barras significan que estamos trabajando con las dos matrices ampliadas al mismo tiempo). Vamos a continuar usando operaciones de filas permitidas hasta obtenen I_2 en lugar de la primera matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \; 3F_2 - 2F_1 \to F_2 \; \left(\begin{array}{cc|c|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \; 2F_1 + F_2 \to F_1 \; \left(\begin{array}{cc|c|c} 6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

procurando llegar al 1 principal en cada fila:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \frac{1}{6}F_1 \to F_1 \\ \\ -\frac{1}{2}F_2 \to F_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right).$$

La ecuación tiene (una única) solución. La solución $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tiene primera columna $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y segunda columna $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Verificamos que esta matriz B también cumple que $B \cdot A = I_2$ y, por lo tanto, es la inversa de A. Concluimos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Observación. La verificación de que en el otro orden el producto da la identidad no es necesaria ya que hay una propiedad que dice que, para una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, si existe una solución $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de $A \cdot B = I_n$, la matriz solución tambien es solución de $B \cdot A = I_n$, es decir, es la inversa de A.

El mecanismo para hallar la inversa de A que usaremos es repetir lo que hicimos en el ejemplo anterior:
Copiar la matriz A y al lado la matriz identidad I_n, usar operaciones por filas permitidas para escalonar y llegar a tener la matriz identidad en lugar de A. La matriz que aparece en lugar de la I_n será A^{-1}, la inversa de A:

$$(A \mid I_n) \quad \rightsquigarrow \quad (I_n \mid A^{-1}).$$

Ejemplo 2. Hallar, si es posible, la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución. Escalonamos la matriz ampliada $(A|I_3)$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} F_2 + F_1 \to F_2 \\ F_3 + F_1 \to F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} -F_1 \to F_1 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad F_3 - 2 \cdot F_2 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} F_1 - F_2 \to F_1 \\ \\ -F_3 \to F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} F_1 + 2 \cdot F_3 \to F_1 \\ F_2 - F_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Como obtuvimos la identidad en lugar de A, la matriz que queda donde estaba la identidad resulta ser la inversa de A, luego

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Utilicemos esta matriz para ver cómo calcular la inversa efectivamente nos permite resolver sistemas lineales:

Ejemplo 3. Resolver el sistema

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

Solución. La forma matricial de este sistema es

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Como, por el ejemplo anterior, la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ tiene por inversa a la matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, multiplicando a izquierda por esta matriz tenemos

$$A^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = I_3 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

que es la única solución del sistema.

Observamos que si A es inversible, la ecuación $A \cdot X = Y$ tiene una **única** solución. Podemos encontrar dicha solución multiplicando ambos miembros de la ecuación por la inversa de A (por izquierda) como hicimos en el ejemplo anterior.

Si, dada una matriz A, partiendo de la matriz ampliada $(A|I)$, es imposible llegar a la identidad en el lugar de la izquierda con las operaciones permitidas, resulta que la matriz A no es inversible:

Ejemplo 4. Mostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ no es inversible.

Solución. Planteamos la ecuación $A \cdot B = I_3$ y escalonamos la matriz ampliada $(A|I_3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 + F_1 \to F_2 \\ F_3 + F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$2F_3 - F_2 \to F_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Como obtuvimos una fila de ceros, no será posible llegar a tener la matriz I_3 a la izquierda.
Si razonamos como lo hicimos en el Ejemplo 1 podemos justificar esto de la siguiente manera: si hubiese una matriz solución B, las columnas de B serían solución de los sistemas cuyas matrices ampliadas son

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

que corresponden a sistemas incompatibles (ver la última ecuación de cada uno). No es posible hallar B: esto implica que A no es inversible.

Propiedad: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es inversible si y solo si su rango es n (y por lo tanto, cuando la escalonamos, no obtenemos ninguna fila de ceros).

Entonces cuando trabajamos con matrices cuadradas, hay una relación entre los sistemas lineales, el rango de la matriz y la existencia o no de su inversa. Resumiendo podemos enunciar lo siguiente:

Propiedad. Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, son equivalentes las siguientes tres afirmaciones:

- A es inversible.
- El sistema $A \cdot X = Y$ es compatible determinado.
- El rango de A es n.

Esto quiere decir que es lo mismo decir que A es inversible, que cualquier sistema que la tiene por matriz tiene única solución y que el rango de A es su tamaño. Sabiendo una de estas propiedades, valen las otras dos.