MATEMÁTICA (61) MATRICES

Definiciones y notación

> **Definición.** Una matriz es un arreglo o tabla rectangular de números.

Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -\frac{2}{5} \\ 2 & 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

son matrices de distintos tamaños. El tamaño de una matriz está dado por su cantidad de filas y su cantidad de columnas. Así, la matriz A tiene 3 filas y 2 columnas y la matriz C tiene 2 filas y 4 columnas.

El conjunto de las matrices de n filas y m columnas se nota $\mathbb{R}^{n\times m}$. En el ejemplo anterior, entonces, $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $C \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ y $D \in \mathbb{R}^{1\times 3}$.

Dada una matriz A, llamamos a_{ij} al elemento que se ubica en la fila i y la columna j de A (con la misma letra de la matriz, pero en minúscula). Entonces, con los ejemplos anteriores, $a_{32} = \frac{1}{3}$, $b_{12} = -1$, $b_{21} = 2$, $c_{22} = 0$ y $d_{12} = \sqrt{2}$.
A veces, dejamos claro cómo se notan los elementos de la matriz con la igualdad $A = (a_{ij})$, que es otra forma de decir que el elemento que está en la i-ésima fila y la j-ésima columna de matriz A se llamará a_{ij}.

Dos matrices son iguales si tienen el mismo tamaño y si sus coeficientes coinciden lugar a lugar. Es decir, con la notación que introdujimos, si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{r\times s}$

$$A = B \iff n = r, m = s \text{ y } a_{ij} = b_{ij} \text{ para todo par } i, j$$

> **Ejemplo:** Describamos los elementos del conjunto
>
> $$H = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 3} \ / \ a_{21} = 5 \text{ y } a_{ij} = 0 \text{ si } i < j\}.$$

En primer lugar, todos los elementos de H son matrices de 2 filas y 3 columnas (pues pertenecen a $\mathbb{R}^{2\times 3}$). En todas, el número que ocupa la fila 2 y la columna 1 es un 5. Además, la última condición dice que, cada vez que el número de fila sea menor que el número de columna ($i < j$), en ese lugar la matriz tendrá un 0. Luego los coeficientes de la matriz a_{12}, a_{13} y a_{23} serán ceros. Por lo tanto, los elementos de H serán de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 5 & b & 0 \end{pmatrix}$$

con a y $b \in \mathbb{R}$.

Para cada n, se llama *matriz identidad* y se nota $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a la matriz $I_n = (a_{ij})$ que cumple que $a_{ii} = 1$ para todo i y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Entonces, la matriz identidad es la matriz cuadrada (con la misma cantidad de filas que de columnas) que tiene coeficiente 1 en los lugares en que el número de la fila y el de la columna coinciden y coeficiente 0 si no. Por ejemplo:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, se llama la *matriz transpuesta de* A a la matriz $A^t \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que cumple que en el lugar ij tiene al coeficiente a_{ji}. Es decir, transponer una matriz es armar otra matriz poniendo por filas a sus columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \to A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Suma y resta de matrices.

Las matrices de igual tamaño se pueden sumar (o restar) y el resultado es otra matriz del mismo tamaño. La forma de hacerlo (al igual que se hace para vectores) es coordenada a coordenada (es decir, lugar a lugar):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 11 & -5 \\ 3 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-3) & 0+11 & -1+(-5) \\ 5+3 & 3+(-2) & -8+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 & -6 \\ 8 & 1 & -\frac{15}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 3 \\ -4 & 5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 1 \\ -5 & \frac{9}{2} \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de una matriz por un escalar

También se puede multiplicar un número por una matriz. El producto, como el de escalares por vectores, también se hace lugar a lugar:

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 3 \\ -4 & 5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 & -2 \cdot 5 \\ -2 \cdot (-3) & -2 \cdot 3 \\ -2 \cdot (-4) & -2 \cdot 5 \\ -2 \cdot (-5) & -2 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ 6 & -6 \\ 8 & -10 \\ 10 & -18 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo: si $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -8 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, resulta que

$$A - \frac{1}{2} \cdot (B + 2 \cdot C) = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 6 & 0 & -8 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 6 & 0 & -8 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ -10 & 6 & 16 \end{pmatrix} \right) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 6 & -10 \\ -6 & 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 & -5 \\ -3 & 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -9 & 10 \\ 8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices

El producto $A \cdot B$ de dos matrices A y B está definido únicamente si la cantidad de columnas de A es igual a la cantidad de filas de B.

Para definirlo, empecemos calculándolo para $A \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, una matriz fila por una matriz columna, cuyo resultado es un número. Para obtenerlo se multiplica el primer elemento de A por el primer elemento de B, el segundo elemento de A con el segundo elemento de B y el tercer elemento de A con el tercer elemento de B y los tres resultados se suman. Por lo tanto, en este caso la multiplicación será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 5$$

En general, para una matriz fila por una matriz columna, tenemos que el producto da un número que se obtiene así:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1}$$

Caso general:

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$ y $B \in \mathbb{R}^{k\times m}$ podemos calcular $A \cdot B$, que será una matriz de tamaño $n \times m$ (la cantidad de columnas de A debe coincidir con la cantidad de filas de B y el resultado tiene tantas filas como A y tantas columnas como B).

Ejemplo 1. Sean

$$A = \underset{2\times 4}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}} \quad , \quad B = \underset{4\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \text{se puede calcular} \quad \underset{2\times 3}{A \cdot B}.$$

Para calcular $A \cdot B$, multiplicamos cada fila de A por cada columna de B; más precisamente,

para obtener el lugar ij de $A \cdot B$, multiplicamos la fila i de A por la columna j de B.

Por ejemplo, para obtener

el lugar 11 de $A \cdot B$, multiplicamos la fila 1 de A por la columna 1 de B,
el lugar 12 de $A \cdot B$, multiplicamos la fila 1 de A por la columna 2 de B, etc.

De esta forma resulta

$$(A \cdot B)_{11} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (1, -1, 0, 2) \cdot (1, -1, 2, 0) = 2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & & \\ \hline & & \end{array}\right)$$

Continuamos calculando cada uno de los lugares de la matriz $A \cdot B$. Para obtener el elemento en la fila 1 columna 2 del producto multiplicamos la primera fila de A por la segunda columna de B

$$(1, -1, 0, 2) \cdot (0, 1, 4, 0) = -1$$

y queda

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & \\ \hline & & \end{array}\right) .$$

Para obtener el elemento de la fila 1 columna 3, calculamos:

$$(1, -1, 0, 2) \cdot (1, 3, 1, 5) = 8$$

y queda

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 8 \\ \hline & & \end{array}\right)$$

Y ahora trabajamos con la segunda fila de A, para calcular similarmente los elementos de la segunda fila de $A \cdot B$:

$$(3, 0, 4, -2) \cdot (1, -1, 2, 0) = 11$$

y queda

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 8 \\ \hline 11 & & \end{array}\right)$$

$$(3, 0, 4, -2) \cdot (0, 1, 4, 0) = 16$$

y queda

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 8 \\ \hline 11 & 16 & \end{array}\right)$$

$$(3, 0, 4, -2) \cdot (1, 3, 1, 5) = -3$$

y queda

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & -1 & 8 \\ \hline 11 & 16 & -3 \end{array}\right)$$

Hemos calculado:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 11 & 16 & -3 \end{pmatrix}.$$

Notemos que en este caso **no se puede calcular** (no está definido) el producto $B \cdot A$, ya que la cantidad de columnas de B no coincide con la cantidad de filas de A.

Ejemplo 2. Calcular el producto $M \cdot N$ y el producto $N \cdot M$ para

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Observemos que

$$\underset{2\times 3}{M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \quad \underset{3\times 2}{N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow \text{ podemos calcular } \underset{2\times 2}{M \cdot N}.$$

Procedemos como en el ejemplo anterior:

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \\ & \end{pmatrix}$$

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ & \end{pmatrix}$$

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & \end{pmatrix}$$

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Volvemos a copiar las matrices M y N para calcular $N \cdot M$

$$\underset{3\times 2}{N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}, \quad \underset{2\times 3}{M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \text{ podemos calcular } \underset{3\times 3}{N \cdot M}.$$

Repitiendo el procedimiento (agrupamos algunos pasos) tenemos

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3. Calcular el producto $S \cdot T$ y el producto $T \cdot S$ para

$$S = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si S y T son matrices cuadradas de $n \times n$ podemos calcular $S \cdot T$, que será una matriz de $n \times n$, y también $T \cdot S$, que será del mismo tamaño. Haciendo las cuentas obtenemos:

$$S \cdot T = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$T \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notar que los dos resultados obtenidos no son iguales. Por lo tanto podemos afirmar que el producto de matrices **no es conmutativo** (aún cuando puedan multiplicarse las matrices en los dos órdenes).

Observación: Veamos qué sucede si multiplicamos una matriz por la matriz identidad del tamaño correspondiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 & 1 \\ \cdot & -2 & 2 \\ & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

En ambos casos, el producto vuelve a dar la matriz A original. Esta es una propiedad general:

Para cada matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, si I_m e I_n son las matrices identidades de $m \times m$ y de $n \times n$ respectivamente, se tiene que

$$A \cdot I_m = I_n \cdot A = A.$$

Algunas propiedades útiles que cumple el producto de matrices cuando los tamaños de las matrices son adecuados para la multiplicación son, si A, B y C son matrices y $k \in \mathbb{R}$:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$
$$A \cdot (B \pm C) = A \cdot B \pm A \cdot C$$
$$(B \pm C) \cdot D = B \cdot D \pm C \cdot D$$
$$k \cdot (A \cdot B) = (k \cdot A) \cdot B = A \cdot (k \cdot B)$$

Forma matricial de sistemas

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$S : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 = 4 \end{cases}$$

Las tres igualdades pueden resumirse en una sola igualdad de matrices columnas:

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Además, la primera matriz columna puede escribirse como un producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Esta última expresión se llama la *forma matricial del sistema* S, donde la primera matriz que aparece es lo que ya conocemos como la matriz de coeficientes del sistema y la columna que aparece en el miembro de la derecha es la última columna de la matriz ampliada del sistema. Más adelante aprovecharemos las propiedades del producto de matrices para resolver sistemas, por eso nos será útil este tipo de escritura.