Sistemas lineales con parámetros

Un sistema de ecuaciones lineales con parámetros es un sistema en el que uno o más coeficientes dependen de uno o más valores indeterminados. En función de estos valores, el sistema podrá ser compatible (determinado o indeterminado) o incompatible.

Ejemplo 1. Para cada $k \in \mathbb{R}$, determinar si el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + kx_3 &= -4 \end{cases}$$

Para clasificar el sistema en función del valor de k, aplicamos el método de Gauss-Jordan para resolver el sistema escalonando la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & k & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 6 & k-4 & -12 \end{array}\right) F_3 - 3F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & k-7 & 0 \end{array}\right)$$

Observamos que si $k - 7 = 0$, o sea, si $k = 7$, la última fila de la matriz escalonada se anula. Entonces, para $k = 7$, el rango de la matriz ampliada y el de la matriz de coeficientes del sistema son ambos iguales a 2. En este caso, el sistema es equivalente a un sistema de 2 ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_2 + x_3 &= -4 \end{cases}$$

Podemos hallar todas las soluciones del sistema: de la segunda ecuación, despejamos $x_3 = -4 - 2x_2$; reemplazamos esta expresión en la primera ecuación y nos queda:

$$x_1 - 3x_2 + 2(-4 - 2x_2) = 4 \iff x_1 - 3x_2 - 8 - 4x_2 = 4 \iff x_1 = 12 + 7x_2$$

Así, las soluciones del sistema son

$$(x_1, x_2, x_3) = (12 + 7x_2, x_2, -4 - 2x_2) = (7x_2, x_2 - 2x_2) + (12, 0, -4) = x_2 \cdot (7, 1, -2) + (12, 0, -4), \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Por otra parte, si $k \neq 7$, el rango de la matriz ampliada del sistema es 3, al igual que el de la matriz de coeficientes (al escalonar, en ambas quedan 3 filas no nulas), con lo cual, el sistema también será compatible. En este caso, es equivalente a un sistema triangular de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_2 + x_3 &= -4 \\ (k-7)x_3 &= 0 \end{cases}$$

Observamos que de la última ecuación se puede despejar el valor de x_3; reemplazando este valor en la segunda ecuación, se despeja x_2 y, finalmente, reemplazando los valores de x_2 y x_3 en la primera ecuación, se obtiene el valor de x_1. En consecuencia, el sistema tiene una única solución, es decir, es compatible determinado.

Resumiendo:
El sistema es compatible para todo $k \in \mathbb{R}$: si $k = 7$, es compatible indeterminado y si $k \neq 7$, es compatible determinado.

Observación. Con el mismo razonamiento que en el ejemplo anterior, se puede ver que, **en el caso de un sistema compatible**:

- si el rango de la matriz del sistema es igual a la cantidad de incógnitas, el sistema es compatible *determinado*;
- si el rango de la matriz del sistema es menor que la cantidad de incógnitas, el sistema es compatible *indeterminado*.

Ejemplo 2. Para cada $k \in \mathbb{R}$, determinar si el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\left\{ \begin{array}{rcc} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + k^2x_2 - x_3 & = & 6 \\ 3x_1 + 6x_2 + kx_3 & = & 6-k \end{array} \right.$$

En primer lugar, escribimos la matriz ampliada del sistema y hacemos operaciones para escalonarla:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & k^2 & -1 & 6 \\ 3 & 6 & k & 6-k \end{array} \right) \begin{array}{c} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & k^2-4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k+3 & -k \end{array} \right)$$

Observamos que si $k^2 - 4 \neq 0$ y $k + 3 \neq 0$, es decir, si $k \neq 2, -2, -3$, la segunda matriz está escalonada y, tanto la matriz ampliada como la matriz del sistema tienen rango 3. Por lo tanto, si $k \neq 2, -2$ y -3, el sistema es compatible determinado.
Analicemos ahora, cada uno de los casos restantes:

- Si $k = 2$, al sustituir el valor en la matriz y escalonar, obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{array} \right) F_3 - 5F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array} \right)$$

  Entonces, el rango de la matriz ampliada es 3 y el rango de la matriz de coeficientes es 2. Por lo tanto, el sistema es incompatible (observar que la última fila de la matriz escalonada nos lleva a la ecuación $0 = -12$).

- Si $k = -2$, al sustituir el valor en la matriz y escalonar, obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) F_3 - F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

  En este caso, los rangos de la matriz ampliada y de la matriz de coeficientes son ambos iguales a 2. Como la cantidad de incógnitas es 3, que es mayor que el rango de la matriz, concluimos que el sistema es compatible indeterminado.

- Si $k = -3$, al sustituir el valor en la matriz, obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

  que está escalonada. En este caso, el rango de la matriz ampliada es 3, mientras que el de la matriz de coeficientes es 2. En consecuencia, el sistema es incompatible. (Observar que la última fila de la matriz escalonada conduce a la ecuación $0 = 3$.)

Resumiendo:
Si $k \neq 2, -2$ y -3, el sistema es compatible determinado, si $k = -2$, es compatible indeterminado y, si $k = 2$ o $k = -3$, el sistema es incompatible.