

Resolución de sistemas lineales - Clasificación

Resolución de sistemas lineales escalonados

Ejemplos. Resolver:

1.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_3 = 6 \end{cases}$$

Observamos que en la última ecuación sólo aparece la incógnita x_3 . Entonces, despejando en esa ecuación, podemos obtener su valor:

$$3x_3 = 6 \iff x_3 = 2$$

Ahora que conocemos el valor de x_3 , al reemplazarlo en la segunda ecuación nos quedará como única incógnita x_2 :

$$x_2 - \underbrace{2}_{x_3} = 3 \iff x_2 = 5$$

Finalmente, ahora que hemos hallado los valores de x_2 y x_3 , los reemplazamos en la primera ecuación y despejamos el valor de x_1 de la ecuación obtenida:

$$4x_1 + 2 \cdot \underbrace{5}_{x_2} - \underbrace{2}_{x_3} = 4 \iff 4x_1 = -4 \iff x_1 = -1$$

Así, deducimos que el conjunto solución del sistema es

$$S = \{(-1, 5, 2)\}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

A diferencia del ejemplo anterior, en este caso ninguna de las ecuaciones depende de una sola incógnita. De todos modos, procederemos similarmente.

De la segunda ecuación, podemos despejar x_2 en función de x_3 :

$$x_2 + x_3 = 1 \iff x_2 = 1 - x_3$$

Ahora reemplazamos esta expresión para x_2 en la primera ecuación y despejamos x_1 (nuevamente en función de x_3):

$$x_1 + 3 \underbrace{(1 - x_3)}_{x_2} - 2x_3 = -1 \iff x_1 + 3 - 3x_3 - 2x_3 = -1 \iff x_1 = 5x_3 - 4$$

Para x_3 no tenemos ninguna restricción, es decir, puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$

En consecuencia, las soluciones del sistema son:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= (5x_3 - 4, 1 - x_3, x_3) \\ &= (5x_3, -x_3, x_3) + (-4, 1, 0) \\ &= x_3 \cdot (5, -1, 1) + (-4, 1, 0) \quad \text{con } x_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Si llamamos $t \in \mathbb{R}$ al valor de x_3 , el conjunto solución del sistema es

$$S = \{t \cdot (5, -1, 1) + (-4, 1, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

Resolver un sistema de ecuaciones lineales siempre significará decidir si no tiene soluciones, obtener la única solución u obtener las infinitas soluciones escritas de esta forma vectorial.

Los ejemplos anteriores nos muestran que un sistema “escalonado” (en el que cada ecuación depende de menos incógnitas que la anterior) es “fácil” de resolver.

Para resolver un sistema lineal, buscaremos otro sistema con las mismas soluciones pero que sea escalonado. Para esto, aplicaremos el *método de Gauss-Jordan*.

Método de Gauss-Jordan

Dado un sistema lineal, las siguientes operaciones nos permiten modificar el sistema sin que cambie el conjunto solución:

- Intercambiar el orden de dos ecuaciones.
- Reemplazar una ecuación por un múltiplo **no nulo** de ella.
- Sumar a una ecuación un múltiplo cualquiera de otra.

El método de Gauss-Jordan consiste en aplicar sistemáticamente estas operaciones de modo de obtener un sistema escalonado. Este sistema tendrá las mismas soluciones que el original y será “fácil” de resolver.

Ejemplo 1. Resolver el sistema
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 = 4 \end{cases}$$

Como las operaciones permitidas sólo involucran cuentas con los coeficientes de las ecuaciones, podemos hacerlas usando la *matriz ampliada del sistema*. Una matriz es una tabla de números. Más adelante definiremos lo que es una matriz en general, por el momento mostramos cómo se construyen las matrices asociadas a un sistema lineal.

La *matriz de coeficientes del sistema* se construye escribiendo ordenadamente, en filas (una para cada ecuación), los coeficientes que multiplican a cada una de las incógnitas (para que esto tenga sentido, en todas las ecuaciones, el orden en que aparecen las incógnitas debe ser el mismo). Si en una ecuación no aparece alguna de las incógnitas, se coloca un 0 en el lugar correspondiente. En este ejemplo, la matriz de coeficientes del sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene una columna por cada una de las incógnitas y una fila por cada ecuación.

La *matriz ampliada del sistema* se construye agregando una columna adicional, a la derecha, separada de las anteriores con una línea vertical, en la que se ubican los resultados de las ecuaciones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 4 \end{array} \right)$$

Efectuar operaciones permitidas en las ecuaciones del sistema es lo mismo que hacerlo en las filas de su matriz ampliada.

Para tener un sistema escalonado, la segunda y la tercera ecuación no deben depender de la variable x_1 , es decir, en la primera columna de la matriz, debe haber ceros debajo del primer 1. Haremos operaciones permitidas para conseguir esto. Notamos F_1 , F_2 y F_3 a las filas de la matriz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 9 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 + 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

A continuación, para que la tercera ecuación del sistema tenga menos incógnitas que la segunda, buscamos que la tercera fila de la matriz empiece con más ceros que la segunda, es decir, que debajo del 2 aparezca un 0.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \end{array} \right) F_3 - 2F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{array} \right)$$

Observamos que esta matriz está escalonada (es decir, que cada fila de la matriz comienza con más ceros que la anterior), con lo cual hemos terminado el proceso. Escribimos el sistema lineal escalonado obtenido:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ -3x_3 = -9 \end{cases}$$

y lo resolvemos despejando "de abajo hacia arriba":

$$-3x_3 = -9 \iff x_3 = 3$$

$$2x_2 + 3 \cdot \underbrace{3}_{x_3} = 5 \iff 2x_2 = -4 \iff x_2 = -2$$

$$x_1 - \underbrace{(-2)}_{x_2} + 2 \cdot \underbrace{3}_{x_3} = 1 \iff x_1 + 8 = 1 \iff x_1 = -7$$

Como este sistema tiene las mismas soluciones que el sistema original, concluimos que el conjunto solución buscado es

$$S = \{(-7, -2, 3)\}$$

Ejemplo 2. Resolver el sistema $\begin{cases} x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -7 \end{cases}$

Comenzamos escribiendo la matriz ampliada del sistema. Notar que en la primera ecuación no aparece la incógnita x_1 ; por este motivo, en el primer lugar de la matriz escribimos un 0.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 6 & -4 & 5 & -7 \end{array} \right)$$

Ahora hacemos operaciones en las filas de modo de obtener una matriz escalonada. En primer lugar, intercambiamos la primera y la segunda fila (recordar que en una matriz escalonada, cada fila debe comenzar con más ceros que la anterior):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & -4 & 5 & -7 \end{array} \right) F_1 \leftrightarrow F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 6 & -4 & 5 & -7 \end{array} \right)$$

Para que el primer coeficiente de la tercera fila se transforme en un 0, podemos hacer $F_3 - 3F_1$, ya que $6 - 3 \cdot 2 = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -4 & -7 \end{array} \right) F_3 - 3F_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Finalmente, para que la matriz quede escalonada, debemos hacer que el -1 ubicado en la segunda columna y la tercera fila se transforme en un 0. Para esto, podemos hacer $F_3 + F_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) F_3 + F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Esta matriz es escalonada, así que ha concluido el proceso. Escribimos el sistema lineal obtenido:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La última ecuación $0 = 0$ no nos da ninguna información sobre las soluciones (porque es una igualdad que vale sin importar cuáles sean los valores de x_1, x_2 y x_3). De la segunda ecuación, despejamos x_2 en función de x_3 :

$$x_2 - 2x_3 = 1 \iff x_2 = 1 + 2x_3$$

Finalmente, reemplazamos esta expresión para x_2 en la primera ecuación y despejamos x_1 :

$$2x_1 - \underbrace{(1 + 2x_3)}_{x_2} + x_3 = -2 \iff 2x_1 - 1 - x_3 = -2 \iff x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_3$$

Así, concluimos que las soluciones del sistema son:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= \left(\frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}, 2x_3 + 1, x_3\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}x_3, 2x_3, x_3\right) + \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right) \\ &= x_3 \cdot \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right) + \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right) \quad \text{con } x_3 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Si llamamos $t \in \mathbb{R}$ al valor de x_3 , el conjunto solución del sistema es

$$S = \left\{ t \cdot \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right) + \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejemplo 3. Resolver el sistema $\begin{cases} x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 6x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases}$

Procedemos como en los ejemplos anteriores: escribimos la matriz ampliada del sistema y hacemos operaciones en las filas de modo de transformarla en una matriz escalonada:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & -4 & 5 & -2 \end{array} \right) F_1 \leftrightarrow F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 6 & -4 & 5 & -2 \end{array} \right) \\ &F_3 - 3F_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right) F_3 + F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

El sistema lineal escalonado obtenido es:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

La última ecuación, $0 = 3$, nos dice que el sistema no tiene solución ya que, sin importar cuáles sean los valores de x_1, x_2 y x_3 , esta igualdad no se cumple. Concluimos entonces que el conjunto solución del sistema es vacío:

$$S = \emptyset$$

Sistemas compatibles e incompatibles

Los sistemas de ecuaciones que no tienen solución se llaman *incompatibles*, mientras que aquellos que tienen solución se llaman *compatibles*. Un sistema compatible puede tener una única solución o infinitas soluciones. En el primer caso, se dice que el sistema es *compatible determinado* y en el segundo, que es *compatible indeterminado*.

De acuerdo a esta clasificación:

- el sistema del Ejemplo 1 es compatible determinado, porque tiene una única solución $(-7, -2, 3)$;
- el sistema del Ejemplo 2 es compatible indeterminado, porque su conjunto solución $S = \left\{ t \cdot \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right) + \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right) : t \in \mathbb{R} \right\}$ es infinito;
- el sistema del Ejemplo 3 es incompatible, ya que no tiene solución.

Podemos darnos cuenta fácilmente de que un sistema es incompatible una vez escalonada su matriz: si alguna de las filas de la matriz escalonada tiene todos los coeficientes de las incógnitas nulos, pero el término independiente no nulo, da lugar a una ecuación del estilo $0 = c$ con c no nulo, la cual no tiene solución (en el Ejemplo 3, nos quedó $0 = 3$), y por lo tanto el sistema es incompatible.

Esto puede formalizarse usando la noción de *rango* de matrices.

El rango de una matriz es la cantidad de filas no nulas una vez escalonada.

En el Ejemplo 3, partimos de la matriz ampliada del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 6 & -4 & 5 & -2 \end{array} \right)$$

y, al escalonarla, obtuvimos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Como esta matriz tiene exactamente 3 filas no nulas, el rango de la matriz ampliada del sistema es 3. Ahora bien, si en lugar de la matriz ampliada del sistema, consideramos la matriz de coeficientes (formada por las primeras tres columnas):

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & -4 & 5 \end{array} \right) \rightsquigarrow \text{al escalonar} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Esta última matriz tiene exactamente 2 filas no nulas, con lo cual, el rango de la matriz de coeficientes del sistema es 2.

El hecho que la matriz ampliada y la matriz de coeficientes tengan distintos rangos se debe justamente a que hay una fila de la matriz ampliada que tiene todas sus entradas nulas, excepto el término independiente; es decir, es lo que causa la incompatibilidad del sistema.

En el Ejemplo 2, partimos de la matriz ampliada del sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 6 & -4 & 5 & -7 \end{array} \right) \rightsquigarrow \text{al escalonar} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

En este caso vemos que tanto la matriz ampliada como la matriz de coeficientes tienen rango 2 (porque en ambas quedan exactamente 2 filas no nulas una vez escalonadas), y el sistema resulta compatible (indeterminado).

Un sistema lineal es compatible si y sólo si la matriz ampliada tiene el mismo rango que la matriz de coeficientes.