Sistemas lineales

Vectores

Así como en el plano $\mathbb{R}^2$ a cada punto le corresponden dos coordenadas (x, y), en el espacio tridimensional (al que llamaremos $\mathbb{R}^3$) a cada punto le corresponden tres coordenadas (x, y, z):

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \ / \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Por ejemplo, $(2, -3)$ es un punto del plano $\mathbb{R}^2$ y $(1, 2, -3)$ es un punto del espacio $\mathbb{R}^3$. Generalizando esta situación, a veces es útil trabajar con "puntos" de más coordenadas como $(1, 2, 2, 0)$ o $(3, 2, 4, -1, 2)$. A estos puntos se los llaman **vectores** y tanto en el plano como en el espacio tienen una interpretación geométrica que veremos más adelante.

Los vectores con igual cantidad de coordenadas se pueden sumar (o restar) y el resultado es otro vector de la misma cantidad de coordenadas. La forma de hacerlo es coordenada a coordenada (es decir, lugar a lugar). Así:

$$(2,3) + (-1,4) = (2 + (-1), 3 + 4) = (1,7)$$
$$(1,2,-3) + (-5,0,\tfrac{1}{2}) = (-4,2,-\tfrac{5}{2})$$
$$(3,1,2,-5) - (0,-2,3,-1) = (3,3,-1,-4)$$

También se puede multiplicar un número (a veces a los números se los llaman *escalares* en este contexto) por un vector. El producto también se hace coordenada a coordenada:

$$5 \cdot (3,2) = (5 \cdot 3, 5 \cdot 2) = (15,10)$$
$$-4 \cdot (1,-1,5) = (-4,4,-20)$$

Entonces, si $A = (3,2,4)$, $B = (-3,1,-2)$ y $C = (1,1,-2)$, resulta que

$$A - \frac{1}{2} \cdot (B + 5 \cdot C) = (3,2,4) - \frac{1}{2} \cdot ((-3,1,-2) + 5 \cdot (1,1,-2)) = (3,2,4) - \frac{1}{2} \cdot ((-3,1,-2) + (5,5,-10)) =$$

$$= (3,2,4) - \frac{1}{2} \cdot (2,6,-12) = (3,2,4) - (1,3,-6) = (2,-1,10)$$

Ecuaciones lineales

Una **ecuación lineal** es una ecuación en la que las incógnitas aparecen a la uno multiplicadas por constantes, y estas expresiones están relacionadas mediante sumas (o restas) e igualadas a un escalar. No aparecen incógnitas multiplicadas entre sí, ni dividiendo, ni otras funciones aplicadas a las incógnitas. Por ejemplo,

$$3x + 2y - 4z = 5$$

es una ecuación lineal, donde las incógnitas son x, y y z ya que los términos son $3x$, $2y$,$-4z$ y 5 y cumplen las condiciones pedidas.

Más ejemplos:

- $3x_1 + x_2 = 5$ es una ecuación lineal,
- $3x_1^2 + x_2 = 4$ no es una ecuación lineal, porque aparece $x_1^2 = x_1 \cdot x_1$.

- $2x_1 + \dfrac{5}{x_2} = 7$ no es una ecuación lineal, porque x_2 está dividiendo.
- $x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$ es una ecuación lineal.

Por convención, siempre escribiremos una ecuación lineal con los términos que involucran incógnitas en el miembro de la izquierda y la constante en el miembro de la derecha.

Una solución de una ecuación (lineal) es un vector de valores que hacen que se cumpla la igualdad dada por la ecuación. Por ejemplo, para la ecuación $3x_1 + x_2 = 5$,

- $(x_1, x_2) = (-1, 8)$ es una solución, ya que $3 \cdot (-1) + 8 = 5$.
- $(x_1, x_2) = (2, 1)$ no es una solución, ya que $3 \cdot 2 + 1 = 7 \neq 5$.

Veamos cómo son todas las soluciones de la ecuación $3x_1 + x_2 = 5$: despejando x_2, tenemos que

$$x_2 = 5 - 3x_1$$

y, en esta igualdad, x_1 puede tomar cualquier valor (el que determinará el valor de x_2). Así, aplicando las operaciones con escalares y vectores que ya vimos, obtenemos que todas las soluciones de la ecuación son

$$(x_1, x_2) = (x_1, 5 - 3x_1) = (x_1, -3x_1) + (0, 5) = x_1 \cdot (1, -3) + (0, 5), \text{ con } x_1 \in \mathbb{R}$$

Para cada valor $x_1 = t$, tenemos una solución: $(x_1, x_2) = t \cdot (1, -3) + (0, 5)$, y éstas son todas las soluciones. Concluimos que el *conjunto solución* de la ecuación es $S = \{t \cdot (1, -3) + (0, 5); t \in \mathbb{R}\}$.

Sistemas lineales

Un sistema de ecuaciones consiste en varias ecuaciones que deben cumplirse simultáneamente. Vamos a trabajar con sistemas de ecuaciones lineales (o sea, sistemas de ecuaciones donde cada una de ellas es una ecuación lineal).

Ejemplo. El siguiente es un sistema de dos ecuaciones lineales con 3 incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

Un vector es una solución del sistema si es solución de cada una de las ecuaciones que lo integran. Veamos si $(-1, 0, 1)$ y $(1, 2, 1)$ son o no soluciones de este sistema:
Para $(-1, 0, 1)$, al reemplazar obtenemos que:

$$\begin{array}{rcl} -1 - 0 + 2 \cdot 1 & = & 1 \\ -2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + 1 & = & 3 \end{array}$$

Como ambas igualdades son ciertas, concluimos que $(-1, 0, 1)$ es una solución del sistema.
Por otro lado, para $(1, 2, 1)$, al reemplazar en las ecuaciones, obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} 1 - 2 + 2 \cdot 1 & = & 1 \\ -2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 & = & 4 \neq 3 \end{array}$$

Vemos que $(1, 2, 1)$ es solución de la primera de las ecuaciones, pero no de la segunda. Concluimos entonces que $(1, 2, 1)$ **no** es solución del sistema.

Hasta acá hemos visto cómo verificar si un vector dado es una solución de un sistema de ecuaciones. ¿Pero cómo encontramos soluciones? Próximamente, veremos un método para encontrar todas las soluciones de un sistema lineal dado.