

Cálculo de áreas

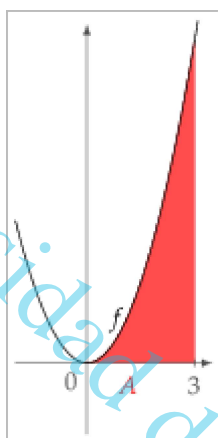
Una de las aplicaciones de la regla de Barrow para el cálculo de integrales definidas es el cálculo de áreas.

Cálculo de área entre el gráfico de una función y el eje x

Ya vimos que, si la función f es positiva o cero en el intervalo $[a; b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f entre los límites a y b .

Ejemplo. Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq 3$.

El área pedida es la sombreada en el siguiente gráfico:



Como la función f es positiva o cero en el intervalo $[0; 3]$ (de hecho, la función f es positiva o cero para todos los reales), el área A pedida está dada por

$$A = \int_0^3 x^2 dx.$$

Para calcular la integral, podemos usar la regla de Barrow. Como $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ es una primitiva de $f(x) = x^2$ tenemos que

$$\int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^3 = \frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{3}0^3 = 9$$

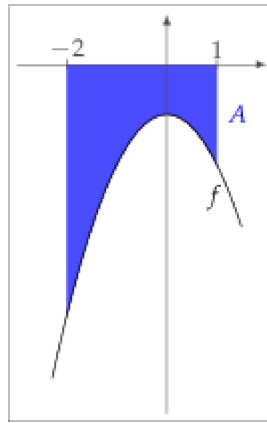
con lo cual

$$A = 9.$$

Si la función f es negativa o cero en el intervalo $[a; b]$, la integral definida da el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f pero con el signo cambiado. Por lo tanto, para calcular el área, bastará con cambiar el signo de la integral definida.

Ejemplo. Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x) = -x^2 - 1$ para $-2 \leq x \leq 1$.

En el siguiente gráfico aparece sombreada la región en cuestión:



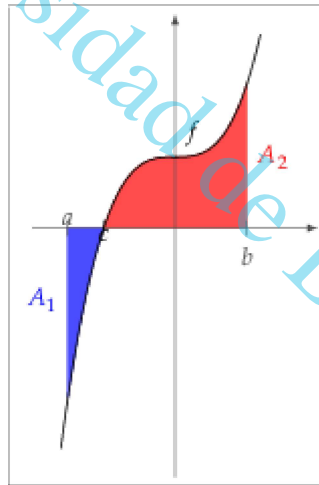
La función f toma valores negativos en todos los reales, con lo cual el área A buscada es

$$A = - \int_{-2}^1 (-x^2 - 1) dx = \int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x \right) \Big|_{-2}^1 = \left(\frac{1}{3}1^3 + 1 \right) - \left(\frac{1}{3}(-2)^3 + (-2) \right) = \frac{4}{3} + \frac{14}{3} = 6.$$

Es decir,

$$A = 6.$$

Si se quiere calcular el área de la región comprendida entre el gráfico de una función f y el eje x para $a \leq x \leq b$, en el caso en que la función f tome valores positivos y negativos en el intervalo $[a; b]$, se deben estudiar los cambios de signo de la función. Por ejemplo, si queremos calcular el área de la región sombreada en la figura



debemos calcular el punto c donde la función corta el eje x (es decir, donde la función vale cero) y calcular la integral definida entre a y c con signo negativo, más la integral definida entre c y b con signo positivo.

Es decir, el área A a calcular será

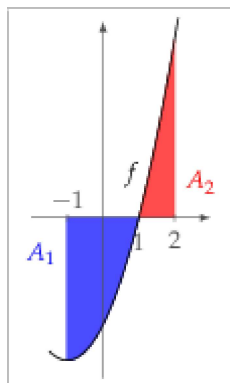
$$A = A_1 + A_2 = - \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Ejemplo. Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ para $-1 \leq x \leq 2$.

Veamos primero si el gráfico de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ corta al eje x para algún valor entre -1 y 2 .

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

es decir, las dos raíces de la cuadrática son 1 y -3. Hagamos un gráfico aproximado para ver cuál es el área pedida:



Entonces, el área a calcular es

$$A = A_1 + A_2 = - \int_{-1}^1 (x^2 + 2x - 3) dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3) dx.$$

Para calcular las integrales definidas en cuestión, usamos la regla de Barrow. Primero calculamos las primitivas de $f(x) = x^2 + 2x - 3$:

$$\int (x^2 + 2x - 3) dx = \int x^2 dx + 2 \int x dx - 3 \int 1 dx = \frac{1}{3}x^3 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 3x + C = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C.$$

Ahora, elegimos una primitiva (por ejemplo, con $C = 0$) y la evaluamos

$$\begin{aligned} A &= - \left(\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right) \Big|_{-1}^1 \right) + \left(\left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x \right) \Big|_1^2 \right) = \\ &= - \left(\left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 + 3 \right) \right) + \left(\left(\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) \right) = - \left(-\frac{16}{3} \right) + \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Es decir, el área pedida es

$$A = \frac{23}{3}.$$

Ejemplo. Calcular el área de la región encerrada entre el eje x y el gráfico de la función $f(x) = x^3 - 4x$.

Calculamos los valores de x para los cuales $f(x) = 0$, es decir, donde el gráfico de f corta al eje x .

$$x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = 2 \text{ ó } x = -2.$$

Para ver qué signos toma la función dada en los intervalos delimitados por las raíces, podemos usar el corolario del Teorema de Bolzano ya que la función es continua:

x	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2
$f(x)$	0	+	0	-	0
pues		$f(-1) = 3$		$f(1) = -3$	

Luego, en un gráfico aproximado de f sombreamos el área a calcular (en azul el área debajo del eje y en rojo el área arriba del eje):