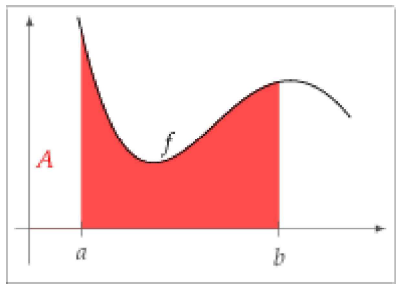
Integral definida

Definición de integral definida

Sea f una función continua **que toma valores positivos o cero** en un intervalo $[a, b]$. La ***integral definida*** de f entre a y b (que se nota $\int_a^b f(x)dx$ y se lee "integral entre a y b de $f(x)$ diferencial x") es el área de la región comprendida entre el gráfico de f y el eje x en el intervalo $[a, b]$. A a y a b se los llama límites de integración.

En el siguiente gráfico, si A es el área sombreada en rojo,



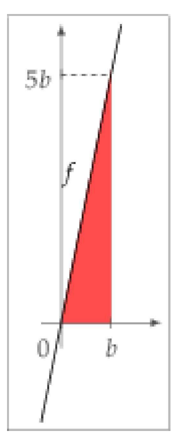
resulta que

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Por ejemplo, si f es la función constante $f(x) = 3$, entonces $\int_2^7 f(x)dx$ resulta el área del rectángulo de base 5 y altura 3 que se muestra en la figura

y, por lo tanto, $\int_2^7 f(x)dx = 5.3 = 15.$

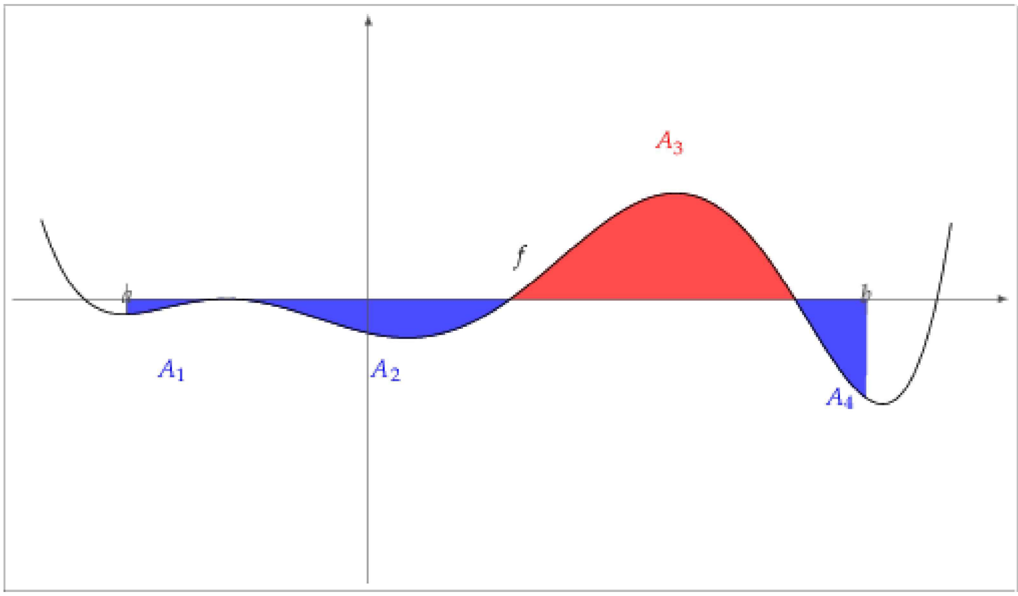
Consideremos ahora la función $f(x) = 5x$ y calculemos, para un valor $b > 0$, $\int_0^b 5x\,dx$.



Como la función cumple que es positiva o cero en el intervalo en cuestión, la integral coincide con el área del triángulo que se muestra en la figura de base b y altura $5b$ que vale $\frac{b.5b}{2}$, es decir

$$\int_0^b 5x\,dx = \frac{5}{2}b^2.$$

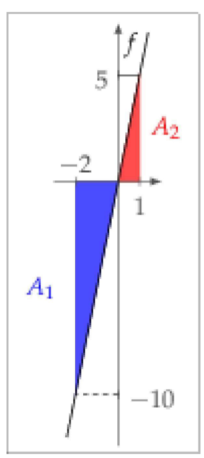
En el caso en que la función f tome **valores positivos, negativos o cero** en el intervalo $[a,b]$, la ***integral definida*** de f entre a y b es la suma de las áreas de las regiones que determina el gráfico de la función f y el eje x **por arriba** del eje x **menos** la suma de las áreas de las regiones que determina el gráfico de la función f y el eje x **por debajo** del eje x. Es decir, en el siguiente gráfico, si f es la función y A_1, A_2, A_3 y A_4 son las áreas correspondientes



entonces

$$\int_a^b f(x)dx = -A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

Por ejemplo, dada la función $f(x) = 5x$, calculemos $\int_{-2}^{1} 5x\,dx$.



Si miramos el gráfico, el área que queda por debajo del eje x es $A_1 = \frac{2.10}{2} = 10$ y el área que queda por arriba del eje x es $A_2 = \frac{1.5}{2} = \frac{5}{2}$. Entonces

$$\int_{-2}^{1} 5x\,dx = -A_1 + A_2 = -10 + \frac{5}{2} = -\frac{15}{2}.$$