Método de integración por partes

Recordemos cómo se calcula la derivada del producto de dos funciones:
Si f y g son funciones derivables,

$$(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x).$$

Integremos ambos miembros:

$$\int (f(x).g(x))'dx = \int [f'(x).g(x) + f(x).g'(x)]dx.$$

El miembro izquierdo nos da (por definición de integral indefinida), $f(x).g(x) + C$; y en el miembro derecho podemos escribir la integral de la suma como la suma de las integrales:

$$f(x).g(x) + C = \int f'(x).g(x)dx + \int f(x).g'(x)dx.$$

Si pasamos restando uno de los términos, obtenemos la siguiente expresión:

$$f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx + C = \int f(x).g'(x)dx.$$

De estas cuentas que acabamos de hacer surge **el método de integración por partes** que nos indica que

$$\boxed{\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx}$$

Veamos en un ejemplo cómo nos es útil este método:

Ejemplo 1. Calcular $\int x\cos(x)dx$.

Esta integral no está en tabla, no tiene ninguna suma (o resta), no tiene ningún número que pueda "sacarse afuera", ni tiene ninguna composición evidente. Intentamos entonces calcularla utilizando el método de integración por partes. Entre los factores, x y $\cos(x)$, elegimos uno que llamaremos $f(x)$ y otro que jugará el rol de $g'(x)$. Tomemos $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos(x)$. Para aplicar el método, tenemos que obtener $f'(x)$, que en este caso es $f'(x) = 1$; y $g(x)$, que es una primitiva de $g'(x)$, y en este caso vemos en la tabla que puede ser $g(x) = \operatorname{sen}(x)$. Entonces nos queda:

$$\int x\cos(x)dx \underset{\substack{\downarrow \\ f(x)=x \to f'(x)=1 \\ g'(x)=\cos(x) \to g(x)=\operatorname{sen}(x)}}{=} x\operatorname{sen}(x) - \int 1.\operatorname{sen}(x)dx = x\operatorname{sen}(x) - \int \operatorname{sen}(x)dx \underset{\substack{\downarrow \\ \text{integral por tabla}}}{=} x\operatorname{sen}(x) - (-\cos(x)) + C = \boxed{x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + C}$$

Algunas observaciones:

- Este método nos reduce el cálculo de una integral al de otra más sencilla. En este ejemplo, pasamos de integrar $x\cos(x)$ a integrar $\operatorname{sen}(x)$, que está en tabla.

- La constante de integración C la sumamos una vez que no tenemos que calcular más integrales. Hay otras formas correctas de tratar la suma de estas constantes, pero sumarla en esta instancia es una de las formas más convenientes.

- La función g puede ser \textbf{cualquier} primitiva de la función que llamamos g'. En general, conviene elegir aquella cuya constante de integración es cero.

- No hay una forma clásica de elegir qué función jugará el papel de f y cuál el de g'. A pesar de que existen algunas reglas prácticas que indican qué elección conviene hacer, la mejor manera de aprender a elegir es a través de la