

Método de integración por sustitución

Método de integración por sustitución

Recordemos cómo se calcula la derivada de la composición (Regla de la cadena):

Si F y g son funciones derivables, entonces

$$(F \circ g(x))' = (F(g(x)))' = F'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Nos queda entonces que la derivada de F compuesta con g en un valor x es F' evaluada en $g(x)$ multiplicada por la derivada de g en x .

Integremos a un lado y al otro:

$$\int (F \circ g(x))' dx = \int F'(g(x)) \cdot g'(x) dx.$$

Obtenemos:

$$F \circ g(x) + C = \int F'(g(x)) \cdot g'(x) dx.$$

Luego, si queremos integrar $F'(g(x)) \cdot g'(x)$, nos basta con calcular F porque ya conocemos g .

El **método de sustitución** nos ayuda a integrar una función que proviene de haber derivado una composición de funciones, simplificando la notación a través de la sustitución de $g(x)$ por una nueva variable u , y $g'(x)dx$ por du

$$\int F' \left(\overbrace{g(x)}^u \right) \overbrace{g'(x)dx}^{du} = F \left(\overbrace{g(x)}^u \right) + C.$$

Nos sugiere que nos "olvidemos" de g y de g' y nos concentremos en hallar F .

Para comprender en qué consiste este método, veamos unos ejemplos:

Ejemplo 1. Calcular $\int 2x\sqrt{x^2 + 1} dx$.

La función $h(x) = 2x\sqrt{x^2 + 1}$ no está en tabla, y no es ni una suma ni una resta de funciones. Podríamos sacar el 2 que está multiplicando, pero esto no nos facilitaría la tarea.

Lo que podemos apreciar es que hay una composición: la función $g(x) = x^2 + 1$ está "adentro" de la función raíz cuadrada. Y, más aún, también vemos que está la derivada de g multiplicando: $g'(x) = 2x$. Si la función que está dentro de la integral viniera de la derivada de una composición, tenemos identificadas muchas partes:

$$(F \circ g(x))' = F'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Nos faltaría identificar F' y deducir quién es F . Este método nos ayuda a simplificar la notación para poder finalizar el cálculo de la integral.

Vamos a sustituir $g(x)$ por una nueva variable que llamaremos u . Y sustituiremos $g'(x)dx$ por du .

$$\begin{aligned}
 \int 2x\sqrt{x^2+1} dx &= \int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} u^{\frac{1}{2}+1} + C \\
 &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 u &= x^2 + 1 & \text{integral} \\
 du &= (x^2 + 1)' dx & \text{por tabla} \\
 &= 2x dx \\
 &= \frac{1}{\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \boxed{\frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + C}
 \end{aligned}$$

Cuando terminamos de integrar, volvemos a la variable original (que en este caso es x).

Verifiquemos que realmente llegamos a la solución buscada. Para esto, tenemos que derivar y ver si nos da la función de adentro de la integral:

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + C \right]' &= \left[\frac{2}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]' + [C]' = \frac{2}{3} \left[(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]' + 0 = \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}-1} (x^2 + 1)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = \sqrt{x^2 + 1} \cdot 2x = 2x\sqrt{x^2 + 1}
 \end{aligned}$$

como queríamos.

Ejemplo 2. Calcular $\int \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2 + 7} dx$.

La función a integrar no está en tabla, no hay sumas ni restas, ni constantes que podamos "sacar afuera". A diferencia del ejemplo anterior, la composición aquí no es tan evidente. Pero el hecho de que haya una función polinómica de grado 3 y otra de grado 2 podría hacernos sospechar que la segunda puede estar relacionada con la derivada de la primera. Propongamos $u = x^3 - 3x^2 + 7$. Entonces $du = (x^3 - 3x^2 + 7)' dx = (3x^2 - 6x) dx = 3(x^2 - 2x) dx$. Y esta última expresión es el numerador, salvo por un 3 que está multiplicando. Para poder utilizar el método de sustitución, vamos a agregar este 3 de la siguiente manera:

$$\int \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2 + 7} dx = \int 1 \cdot \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2 + 7} dx = \int \frac{3}{3} \cdot \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2 + 7} dx = \int \frac{1}{3} \cdot \frac{3(x^2 - 2x)}{x^3 - 3x^2 + 7} dx.$$

Ahora "sacamos afuera" el $\frac{1}{3}$ y aplicamos sustitución como antes:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} \int \frac{3(x^2 - 2x)}{x^3 - 3x^2 + 7} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{3} \ln(u) + C = \boxed{\frac{1}{3} \ln(x^3 - 3x^2 + 7) + C} \\
 &\quad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 u &= x^3 - 3x^2 + 7 & \text{integral} \\
 du &= (x^3 - 3x^2 + 7)' dx & \text{por tabla} \\
 &= 3(x^2 - 2x) dx
 \end{aligned}$$