Estudio de funciones

Estudio de funciones y gráficos aproximados

El objetivo de esta sección es mostrar cómo podemos construir el gráfico aproximado de una función f a partir del estudio de su dominio, asíntotas, crecimiento y decrecimiento y extremos locales.

Comenzaremos con la función $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3$ de la cual ya analizamos en una explicación anterior su crecimiento y decrecimiento y sus extremos relativos.

Ejemplo 1. Sea $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3$. Hacer un gráfico aproximado de f.

Recordemos que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f son $I^{\uparrow} = (-\infty; 0)$ y $I_{\downarrow} = (0; +\infty)$, respectivamente, y f tiene un único extremo relativo, que es un máximo, en $x = 0$.
Un punto destacado del gráfico de f es aquél donde se encuentra el máximo local. Para determinarlo, calculamos el valor de f en $x = 0$:

$$f(0) = 3$$

Graficaremos también el punto del gráfico correspondiente al punto crítico de f en el que no tiene un extremo local, para lo cual calculamos

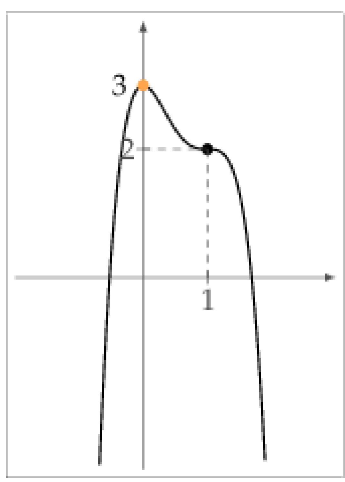
$$f(1) = 2$$

Otra información que nos será de utilidad para la construcción del gráfico de f es su comportamiento en $+\infty$ y $-\infty$. Para conocerlo, calculamos los límites correspondientes:

$$\lim_{x \to +\infty} -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3 = \lim_{x \to +\infty} x^4(-3 + \frac{8}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{3}{x^4}) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 3 = \lim_{x \to -\infty} x^4(-3 + \frac{8}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{3}{x^4}) = -\infty$$

Con toda esta información podemos construir un gráfico aproximado de f.



Observemos que, si bien f no tiene un máximo o mínimo local en $x = 1$ (dado que f es decreciente tanto a la izquierda como a la derecha de $x = 1$), la recta tangente al gráfico de f en el punto $(1, f(1))$ es horizontal (su pendiente es $f'(1) = 0$). Como consecuencia, cerca del punto $(1, f(1))$, el gráfico debe ser necesariamente como lo hemos dibujado arriba (comparar con el gráfico de la función $f(x) = x^3$ que hemos visto en la explicación de extremos locales).