Regla de L'Hôpital

Regla de L'Hôpital

Una de las indeterminaciones con las que nos encontramos cuando queremos calcular límites son las del tipo "$\frac{0}{0}$". Hasta ahora vimos algunas técnicas para salvarlas, pero hay un resultado que nos permite calcular muchos más límites de este tipo:

Regla de L'Hôpital: Sean f y g funciones derivables en un intervalo $(a;b)$ y $c \in (a;b)$ un número tal que $f(c) = g(c) = 0$. Si $g'(x) \neq 0$ en el conjunto $(a;b) - \{c\}$ y existe $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (es decir, este límite da un número o da infinito), entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observación 1: Las funciones con las que trabajamos en este curso son derivables salvo en finitos puntos de su dominio y sus derivadas tienen finitos valores donde valen cero. Esto hace que, para estas funciones, no sea necesario chequear si son derivables ni la condición en la regla que pide que $g'(x) \neq 0$ en $(a;b) - \{c\}$.

Veamos cómo funciona la Regla de L'Hôpital en un ejemplo:

Ejemplo 1. Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1}$.

Si llamamos $f(x) = e^{x-1} - 1$ y $g(x) = x - 1$, resulta que f y g son funciones derivables en todo $\mathbb{R}$. Si evaluamos las dos funciones en $x = 1$, tenemos que $f(1) = 0$ y $g(1) = 0$. Es decir, estamos en una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$". Hasta ahora tenemos dos funciones derivables en un intervalo que contiene al 1 y ambas valen 0 en $x = 1$. Calculemos entonces $f'(x) = e^{x-1}$ y $g'(x) = 1$. Entonces, si podemos calcular $\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, éste será el valor del límite que nos piden calcular:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1}}{1} = 1$$

y por lo tanto

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} = 1.}$$

Observación 2: En general, para escribir menos, podemos resolver el ejemplo anterior de la siguiente manera: Primero evaluamos numerador y denominador en 1 para ver si podemos calcular el límite directamente o estamos en presencia de una indeterminación:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\overbrace{e^{x-1} - 1}^{\to 0}}{\underbrace{x - 1}_{\to 0}} =$$

Como es una indeterminación del tipo $''\frac{0}{0}''$, podemos intentar aplicar la regla de L'Hôpital por lo que derivamos numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{e^{x-1}-1}^{\to 0}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}}{1} =$$

Ahora, vemos si podemos calcular este nuevo límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{e^{x-1}-1}^{\to 0}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{e^{x-1}}^{\to 1}}{1} = 1$$

Observación 3: Hay que verificar ***siempre*** si estamos en presencia de una indeterminación antes de aplicar la regla de L'Hôpital; si no hay indeterminación, la regla de L'Hôpital no puede aplicarse. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{x+1}^{\to 2}}{\underbrace{x+3}_{\to 3}} = \frac{2}{3}.$$

Sin embargo, si derivamos numerador y denominador, el límite da 1. La diferencia en los resultados se da porque **no podemos aplicar la regla de L'Hôpital**, ya que no estamos en presencia de una indeterminación.

Ejemplo 2. Calcular $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(3-x)}{x^2-x-2}$.

Siguiendo los pasos anteriores, tenemos que

$$\lim_{x\to 2} \frac{\overbrace{\ln(3-x)}^{\to 0}}{\underbrace{x^2-x-2}_{\to 0}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{\overbrace{\frac{1}{3-x}}^{\to -1}}{\underbrace{2x-1}_{\to 3}} = -\frac{1}{3}$$

Luego,

$$\boxed{\lim_{x\to 2} \frac{\ln(3-x)}{x^2-x-2} = -\frac{1}{3}.}$$

En el siguiente ejemplo, vemos cómo podemos resolver el límite planteado aplicando la regla de L'Hôpital más de una vez:

Ejemplo 3. Calcular $\lim_{x\to 1} \frac{x-1-\ln(x)}{e^{2x-2}+1-2x}$.

Como antes, verificamos si hay indeterminación y, en caso afirmativo, intentamos aplicar la regla:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{x-1-\ln(x)}^{\to 0}}{\underbrace{e^{2x-2}+1-2x}_{\to 0}} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\overbrace{1-\frac{1}{x}}^{\to 0}}{\underbrace{2e^{2x-2}-2}_{\to 0}}$$

Al llegar a esta instancia, volvemos a tener una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$". Podemos intentar aplicar la regla nuevamente: