Regla de la cadena

Derivada de la composición o regla de la cadena

La última propiedad que usaremos para derivar es cómo derivar una composición de funciones, también llamada ***regla de la cadena***. Recordemos que $f \circ g(x) = f(g(x))$.

Si f y g son funciones derivables, entonces

$$(f \circ g(x))' = f'(g(x)).g'(x).$$

Es decir, la derivada de f compuesta con g en un valor x es la derivada de f evaluada en $g(x)$ multiplicada por la derivada de g en x.

Por ejemplo, si queremos calcular la derivada de

$$h(x) = \text{sen}(x^2 - 3x),$$

lo último que calculamos para evaluar h en un x no es ni una suma, ni una resta, ni un producto ni una división. Sin embargo, podemos pensar que h es una composición de funciones: dado x, primero le aplicamos $x^2 - 3x$ y al resultado le aplicamos la función *seno*. Es decir, si llamamos $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = x^2 - 3x$, resulta que $h(x) = f(g(x))$.

Como $f'(x) = \cos(x)$ y $g'(x) = 2x - 3$, entonces

$$h'(x) = f'(g(x)).g'(x) = \cos(x^2 - 3x).(2x - 3).$$

Notar que la regla de la cadena nos dice que tenemos que ir derivando las funciones "de afuera para adentro" e ir multiplicando los resultados.

Ejemplo 1. Calcular la derivada de $h(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$.

Nuevamente podemos ver esta función como una composición: dado x primero calculamos la raíz cúbica de x y luego, calculamos e elevado al resultado obtenido. Teniendo en cuenta que la función que aplicamos al final es la exponencial, ésta es la función que derivamos primero. Como la derivada de la exponencial es la exponencial, tenemos

$$h'(x) = e^{\sqrt[3]{x}}.(\sqrt[3]{x})'$$

Como $(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, tenemos que

$$h'(x) = e^{\sqrt[3]{x}}.\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

y operando, resulta que

$$\boxed{h'(x) = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3.x^{\frac{2}{3}}} = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3.\sqrt[3]{x^2}}.}$$

Ejemplo 2. Calcular la derivada de $h(x) = \text{sen}^2(3x^4 + 1)$.

Dado x, lo primero que calcula la función es $3x^4 + 1$, al valor obtenido se le aplica la función seno y, a este valor, se lo eleva al cuadrado. Es decir, en este caso estamos en presencia de una composición de tres funciones. La última función que aplicamos es elevar al cuadrado, por lo tanto ésta es la primera que derivamos (recordemos que $(x^2)' = 2x$) y multiplicamos por la derivada del resto:

$$h'(x) = 2\,\text{sen}(3x^4+1).\left(\text{sen}(3x^4+1)\right)'.$$

El paréntesis que queda por derivar también es una composición y la última función que aplicamos es la función seno, así que esta es la primera que derivamos. Recordando que $(\text{sen}(x))' = \cos(x)$, tenemos que

$$h'(x) = 2\,\text{sen}(3x^4+1).\cos(3x^4+1).(3x^4+1)'$$

y finalmente, usando la otras propiedades vistas anteriormente calculamos $(3x^4+1)'$ y obtenemos

$$\boxed{h'(x) = 2\,\text{sen}(3x^4+1).\cos(3x^4+1).12x^3.}$$

Ejemplo 3. Hallar la recta tangente al gráfico de $f(x) = x.\ln(x^3-7)+1$ en el punto de abscisa $x=2$.

La recta tangente en el punto de abscisa $x=2$ es la recta de pendiente $f'(2)$ que pasa por el punto $(2, f(2))$. Para poder hallarla, primero calculamos la derivada de la función f y la evaluamos en 2.

$$\left(x.\ln(x^3-7)+1\right)' \underset{\substack{\downarrow \\ \text{derivada} \\ \text{de la suma}}}{=} \left(x.\ln(x^3-7)\right)' + (1)' \underset{\substack{\downarrow \\ \text{derivadas del} \\ \text{producto y de} \\ \text{una constante}}}{=} (x)'\ln(x^3-7) + x.\left(\ln(x^3-7)\right)' + 0 =$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{derivada de } x, \\ \text{regla de la cadena} \\ \text{y derivada de ln}}}{=} \ln(x^3-7) + x.\frac{1}{x^3-7}.\left(x^3-7\right)' \underset{\substack{\downarrow \\ \text{derivada de} \\ x^3-7}}{=} \ln(x^3-7) + x.\frac{1}{x^3-7}.3x^2 =$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{operando}}}{=} \ln(x^3-7) + \frac{3x^3}{x^3-7}$$

Entonces, $f'(x) = \ln(x^3-7) + \dfrac{3x^3}{x^3-7}$. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente buscada es

$$m = f'(2) = \ln(2^3-7) + \frac{3.2^3}{2^3-7} = \ln(1) + 24 = 24.$$

Como $f(2) = 2.\ln(2^3-7)+1 = 1$, buscamos la recta de pendiente $m=24$ que pasa por el punto $(2,1)$. Entonces tenemos que la ecuación de la recta es

$$y = 24x + b$$

y cuando $x=2$, $y=1$. Es decir

$$1 = 24.2 + b.$$

Por lo tanto, $b=-47$ y la recta tangente buscada es

$$\boxed{y = 24x - 47.}$$