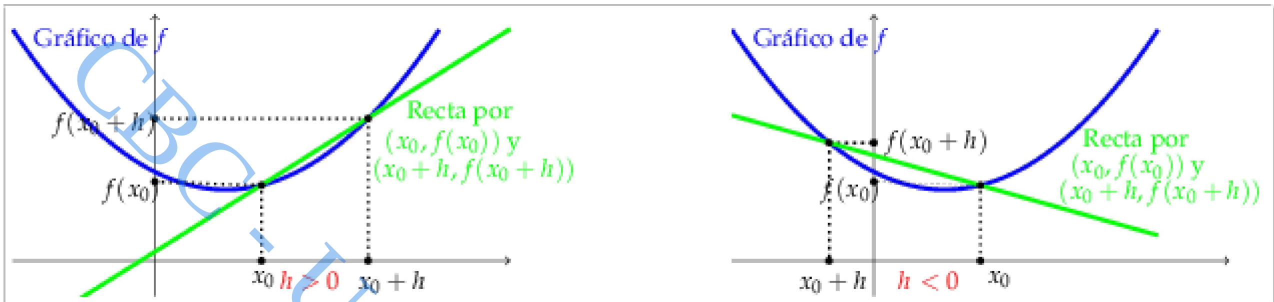
# Derivadas

### Definición de derivada

Sea $f$ una función y $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$. Consideramos un valor $x_0 + h$ cercano a $x_0$ (notar que si $h > 0$ este punto está a la derecha de $x_0$ y que si $h < 0$, este punto está a la izquierda de $x_0$). Trazamos la recta que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ con $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ como indica la figura siguiente




Ahora, hacemos variar el valor $x_0 + h$ de forma tal que se acerque a $x_0$ (es decir, vemos qué pasa cuando $h$ se acerca a $0$). Intuitivamente, diremos que la recta tangente al gráfico de $f$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es la recta límite (si existe) de las rectas que pasan por $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ cuando $h$ tiende a $0$ tanto por la derecha como por la izquierda.

En la animación **Derivada** se ve cómo, a medida que $h$ se acerca a $0$, las rectas se van acercando a la recta tangente.

La derivada de $f$ en $x_0$ es la pendiente de la recta tangente al gráfico de $f$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ si esta recta existe. Como para un $h$ fijo, la pendiente de la recta que pasa por $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ es

$$m = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

entonces la ***derivada de $f$ en*** $x_0$, que se nota $f'(x_0)$, se define como

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

si este límite existe. En este caso diremos que $f$ es derivable en $x_0$.

Ahora podemos dar una definición precisa de recta tangente: Si $f$ es derivable en $x_0$, la ***recta tangente al gráfico de $f$ en*** $(x_0, f(x_0))$ es la recta de pendiente $f'(x_0)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$.

**Ejemplo.** Dada la función $f(x) = x^2$, calcular $f'(1)$. Hallar la recta tangente al gráfico de $f$ en el punto $(1, f(1))$.

Para calcular $f'(1)$ usaremos la definición de derivada. Notar que en este caso $x_0 = 1$:

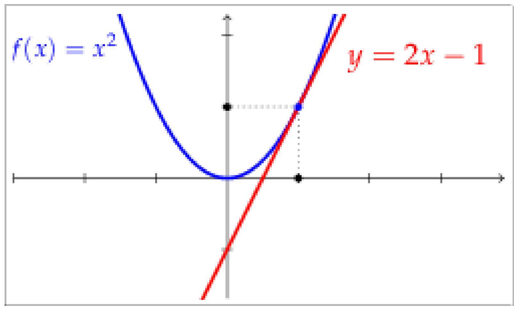
$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{1} + 2h + h^2 - \cancel{1}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} = 2$$

Es decir, $\boxed{f'(1) = 2.}$

Ahora, calculamos la recta tangente al gráfico de $f$ en el punto $(1, f(1)) = (1, 1)$. Por la definición, buscamos la recta de pendiente $2$ que pasa por el $(1, 1)$. La recta tiene la forma $y = 2x + b$. Como pasa por el punto $(1, 1)$, debe valer $1 = 2.1 + b$, con lo que $b = 1 - 2 = -1$. Es decir, la recta tangente que buscamos es

$$\boxed{y = 2x - 1}$$

Podemos ver lo que calculamos en el siguiente gráfico:




En el ejemplo anterior, hallamos la derivada de $f(x) = x^2$ en $x_0 = 1$. Ahora vamos a calcular la derivada de la función $f(x) = x^2$ **para cualquier valor** $x_0$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2hx_0 + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x_0 + h)}{\cancel{h}} = 2x_0$$

Entonces, tenemos que $f'(x_0) = 2x_0$ para cualquier valor de $x_0$.

La función que a cada valor de $x$ le asigna el valor de la derivada de $f$ en $x$ se llama *función derivada de* $f$ y se nota $f'$. A la derivada de $f$ en $x$ la notamos $f'(x)$ o $(f(x))'$.

En el ejemplo anterior vimos que, si $f(x) = x^2$, entonces su función derivada es $f'(x) = 2x$.

**Observación:** Como definimos antes, la recta tangente al gráfico de $f$ en $(x_0, f(x_0))$ es la recta de pendiente $f'(x_0)$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$. Se puede deducir haciendo cuentas que la recta tangente al gráfico de $f$ en $(x_0, f(x_0))$ tiene la siguiente fórmula:

$$\boxed{y = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0)}$$

Notar que la pendiente de la recta es $f'(x_0)$ y su ordenada al origen es $f(x_0) - f'(x_0)x_0$, que como $x_0$ es un número fijo, son dos números. Además, cuando se reemplaza $x = x_0$ resulta que $y = f(x_0)$ que es lo que debe cumplir la recta tangente.

La derivada puede no existir. Por ejemplo, en la animación **No derivable**, se ve una función que no es derivable en $x_0$.

En general, no vamos a hallar derivadas calculando límites, sino basándonos en algunas derivadas básicas y aplicando ciertas propiedades de la derivación.