Teorema de Bolzano - Segunda parte

El Corolario del Teorema de Bolzano también permite describir las soluciones de una desigualdad como un intervalo o una unión de intervalos disjuntos. Esencialmente, el procedimiento es reducir el problema a determinar el dominio, los ceros, el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de una función.

Ejemplo: Escribir el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{2x+11}{x-2} \geq -1\}$ como intervalo o unión de intervalos disjuntos.

Primero notemos que $\frac{2x+11}{x-2} \geq -1$ es equivalente a $\frac{2x+11}{x-2} + 1 \geq 0$. Por lo tanto, si llamamos $f(x) = \frac{2x+11}{x-2} + 1$, queremos calcular los valores de x para los cuales $f(x) \geq 0$, es decir, necesitamos calcular $C^0(f) \cup C^+(f)$ (como la desigualdad no es estricta, nos sirven los tanto los valores de x para los cuales $f(x) = 0$ como los que cumplen $f(x) > 0$).

En un primer paso, calculamos el $\text{Dom}(f)$ para ver en qué puntos f no está definida y por lo tanto no es continua. La única operación que puede traer problemas en la definición de f es la división, así que pedimos que el denominador no sea cero.

Como $x - 2 = 0$ es equivalente a $x = 2$, resulta que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$.

En un segundo paso, calculamos el conjunto de ceros de f (teniendo en cuenta que $x \neq 2$):

$$\frac{2x+11}{x-2} + 1 = 0 \iff \frac{2x+11}{x-2} = -1 \iff 2x + 11 = 2 - x \iff 3x = -9 \iff x = -3.$$

Por lo tanto, tenemos una función que es continua en $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ cuyo único cero es $x = -3$. Por el Corolario del Teorema de Bolzano, esta función tendrá signo constante en $(-\infty; -3)$, en $(-3; 2)$ y en $(2; +\infty)$. Para ver qué signo toma en cada intervalo, podemos evaluar en un punto de cada uno:

$f(-4) = \frac{2(-4)+11}{-4-2} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} > 0$, luego en $(-\infty; -3)$ la función f es positiva.

$f(0) = \frac{2.0+11}{0-2} + 1 = -\frac{11}{2} + 1 = -\frac{9}{2} < 0$, luego en $(-3; 2)$ la función f es negativa.

$f(3) = \frac{2.3+11}{3-2} + 1 = 17 + 1 = 18 > 0$, luego en $(2; +\infty)$ la función f es positiva.

Resumiendo lo que obtuvimos en una tabla, tenemos que

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
pues	$f(-4) > 0$		$f(0) < 0$		$f(3) > 0$

Como el conjunto A es igual a $C^+(f) \cup C^0(f)$, resulta que

$$\boxed{A = (-\infty; -3] \cup (2; +\infty)}$$

Aproximación de ceros:

El Teorema de Bolzano también nos permite, en algunos casos, aproximar los ceros de una función continua.

Por ejemplo, tomemos la función polinómica $f(x) = x^3 + x^2 - 3$. La función cumple:

- $f(0) = -3$
- $f(2) = 9$
- f es continua en todo $\mathbb{R}$ (ya que es polinómica).

Entonces, encontramos dos valores donde la función continua cambia de signo ($f(0) = -3 < 0$ y $f(2) = 9 > 0$). El Teorema de Bolzano nos asegura que existe un valor c con $0 < c < 2$ tal que $f(c) = 0$, es decir, que hay un cero de la función entre 0 y 2.

Más aún, podemos seguir utilizando este teorema para aproximar mejor un valor c donde la función vale 0.

Dada la función $f(x) = x^3 + x^2 - 3$, ya sabemos que $f(0) = -3$ y $f(2) = 9$. ¿Cuánto vale f en 1, el punto medio del intervalo $(0;2)$? Antes de hacer la cuenta, pensemos lo siguiente:

- Si $f(1) = 0$ ya tenemos un cero de la función.
- Si $f(1) < 0$, como $f(2) > 0$, usando de nuevo el teorema, tenemos que la función tiene un cero en el intervalo $(1;2)$ que es un intervalo más chico que el $(0;2)$.
- Si $f(1) > 0$, como $f(0) < 0$, usando de nuevo el teorema, tenemos que la función tiene un cero en el intervalo $(0;1)$ que es un intervalo más chico que el $(0;2)$.

Para decidir en qué caso estamos, basta calcular $f(1) = -1$, así que f tiene un cero en el intervalo $(1;2)$.

Si seguimos un paso más, buscamos el punto medio (el promedio) entre 1 y 2: $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$. Evaluamos $f(\frac{3}{2}) = \frac{21}{8}$ y, como este valor es positivo y $f(1)$ es negativo, resulta que hay un cero de la función en el intervalo $(1;\frac{3}{2})$ que tiene longitud $\frac{1}{2}$.

Siguiendo así, podemos acercarnos al cero de la función tanto como queramos (porque en cada paso lo encerramos en un intervalo cuya longitud es la mitad de la longitud del intervalo anterior). El próximo paso, por ejemplo, sería calcular el promedio entre 1 y $\frac{3}{2}$ (que da $\frac{5}{4}$), evaluar la función en ese punto y decidir usando el Teorema de Bolzano si $\frac{5}{4}$ es un cero, si el cero está en el intervalo $(1;\frac{5}{4})$ o en el $(\frac{5}{4};\frac{3}{2})$.

Cuando ubicamos un cero de una función en un intervalo abierto de longitud d cualquiera, decimos que el punto medio del intervalo **aproxima al cero con error menor que** $\frac{d}{2}$, pues si nos desplazamos desde el punto medio a la derecha o a la izquierda en el intervalo una distancia de $\frac{d}{2}$ es seguro que en algún momento encontraremos a un cero de la función.

En el ejemplo anterior, como encontramos un cero de la función f en el intervalo $(1;\frac{3}{2})$ que tiene longitud $\frac{1}{2}$ podemos decir que su punto medio $\frac{5}{4} = 1,25$ aproxima a un cero de f con error menor a $\frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$.