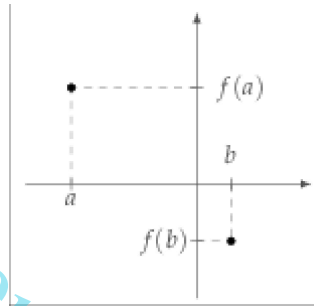


Teorema de Bolzano - Primera parte

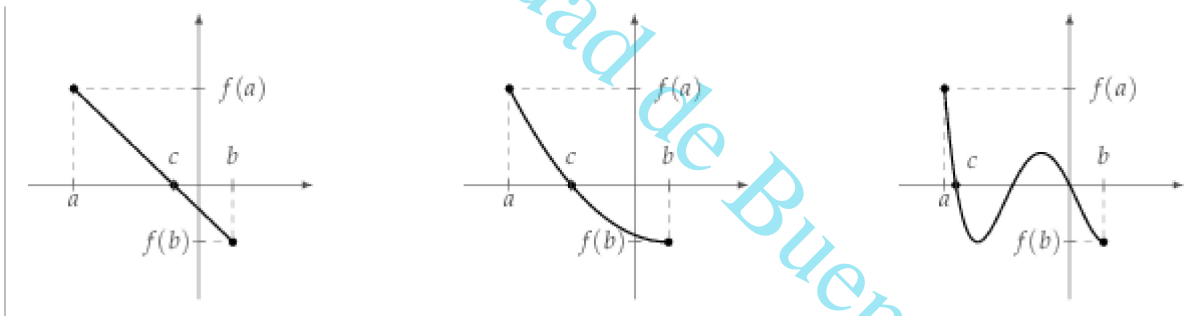
Ya sabemos calcular el conjunto de ceros, el conjunto de positividad y el de negatividad para funciones lineales (despejando) y cuadráticas (mediante la fórmula de la resolvente y analizando el gráfico). El Teorema de Bolzano y su Corolario es una herramienta que nos permite, en algunos casos, calcular estos conjuntos para otras funciones.

Teorema de Bolzano: Sea f una función real continua en todo punto del intervalo $[a, b]$. Si $f(a)$ y $f(b)$ son dos números de distinto signo, entonces existe por lo menos un valor c en el intervalo (a, b) donde la función f vale 0.

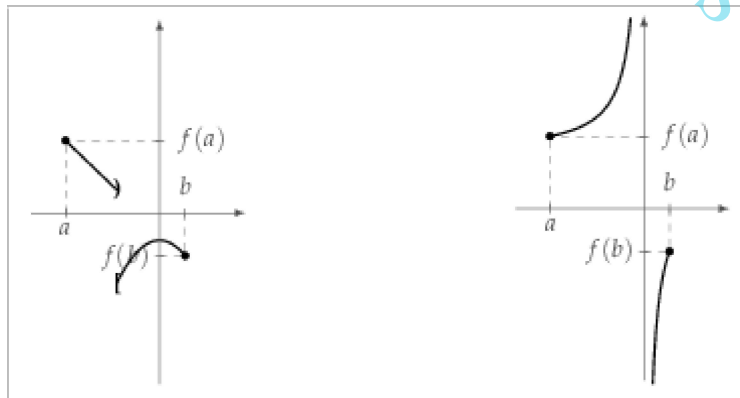
Intuitivamente, lo que dice el Teorema de Bolzano es que, si tenemos que dibujar una función **sin levantar el lápiz** (continua) y el punto de partida está de un lado del eje x y el de llegada del otro (ésta es la condición de que $f(a)$ y $f(b)$ tengan distinto signo)



entonces, de cualquier modo que dibujemos la función, vamos a tener que cruzar el eje x en algún momento por lo menos una vez (y ése será un punto c tal que $f(c) = 0$).



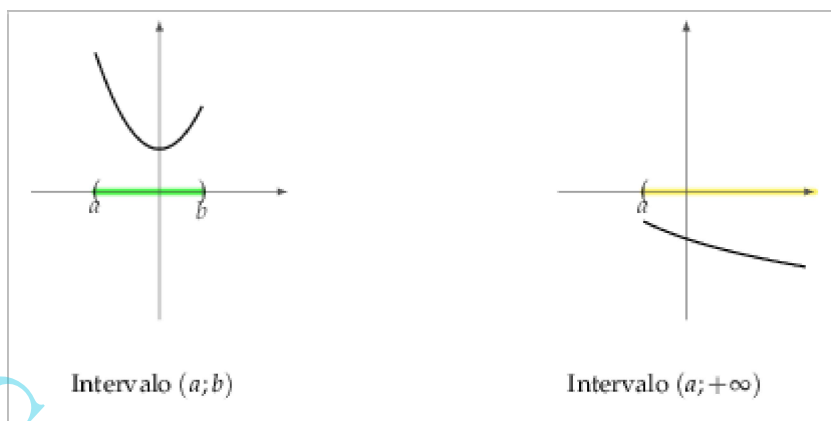
Observemos que la condición de que la función sea continua es fundamental:



En estos casos, a pesar de que los signos de $f(a)$ y de $f(b)$ son distintos, el tener que levantar el lápiz para dibujar las funciones hace que pueda no existir un valor c entre a y b donde la función valga 0.

Corolario del Teorema de Bolzano:

Supongamos ahora que tenemos que dibujar en un intervalo una función continua que nunca vale cero (es decir, cuyo gráfico no toque el eje x). La condición de que sea continua nos obliga a que, una vez que elijamos si la función en un punto es positiva o negativa (no puede ser 0 porque, si no, su gráfico estaría tocando el eje x) en el resto de los puntos la función deberá conservar este signo, es decir, será toda positiva o toda negativa, ya que no podemos cruzar el eje:



Esto es exactamente lo que dice el Corolario del Teorema de Bolzano:

Corolario del Teorema de Bolzano: Sea f una función real continua en todo punto de un intervalo real. Si f no vale 0 para ningún punto de dicho intervalo, entonces su signo en el intervalo es constante (es decir, es siempre positiva o siempre negativa en el intervalo).

Ahora aplicaremos el corolario del Teorema de Bolzano para calcular los conjuntos de positividad y de negatividad de una función continua a partir de su conjunto de ceros.

Ejemplo 1: Sea f una función con $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ continua en todo punto. Hallar el conjunto de positividad y el conjunto de negatividad de la función f si se sabe que sus únicos ceros son -2 y 1 y que $f(-4) = -4$, $f(0) = 7$ y $f(3) = 5$.

Como ya nos dicen que los únicos ceros de f son -2 y 1 y que la función f es continua en todo \mathbb{R} , el Corolario del Teorema de Bolzano nos asegura que en cada uno de los intervalos $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$ y $(1; +\infty)$ el signo debe ser constante.

En el intervalo $(-\infty; -2)$ el signo coincidirá con el de $f(-4) = -4$ pues $-4 \in (-\infty; -2)$, por lo tanto f es negativa en $(-\infty; -2)$.

En el intervalo $(-2; 1)$ el signo coincidirá con el de $f(0) = 7$ pues $0 \in (-2; 1)$, por lo tanto f es positiva en $(-2; 1)$.

En el intervalo $(1; +\infty)$ el signo coincidirá con el de $f(3) = 5$ pues $3 \in (1; +\infty)$, por lo tanto f es positiva en $(1; +\infty)$. (Notar que, en este caso, en dos intervalos contiguos, el $(-2; 1)$ y el $(1; +\infty)$, la función tiene el mismo signo: no es necesariamente cierto que de intervalo a intervalo los signos vayan cambiando.)

Suele representarse lo obtenido en una tabla:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
pues	$f(-4) < 0$		$f(0) > 0$		$f(3) > 0$

Es decir, la respuesta del ejemplo es

$$C^+(f) = (-2; 1) \cup (1; +\infty) \text{ y } C^-(f) = (-\infty; -2).$$