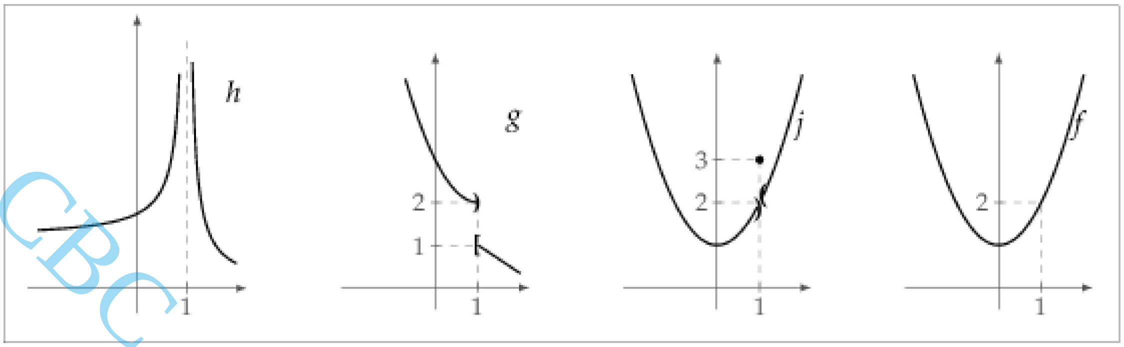
Continuidad

Consideremos las siguientes funciones reales y estudiemos lo que pasa en cada una para el valor $x_0 = 1$:



Según los gráficos:

a) La función h no está definida en 1. Para dibujarla hay que levantar el lápiz.

b) La función g está definida en 1 y vale $g(1) = 1$ (notar que el corchete indica que el punto $(1, 1)$ está en el gráfico y que el paréntesis en el $(1, 2)$ indica que este punto no está en el gráfico). Sin embargo, la función da un salto en ese valor y para dibujarla también hay que levantar el lápiz en $x_0 = 1$.

c) La función j está definida en 1 y vale $j(1) = 3$. Sin embargo, cuando nos acercamos a 1 por derecha o por izquierda, la función se acerca a 2 (dicho más formalmente, $\lim\limits_{x \to 1} j(x) = 2$), con lo que la función da un salto en $x_0 = 1$ y para dibujarla también hay que levantar el lápiz.

d) La función f está definida en 1 y vale $f(1) = 2$. Esta función no pega saltos, así que puede dibujarse sin levantar el lápiz en $x_0 = 1$.

Intuitivamente, una función f es continua en un valor x_0 si se cumple, primero, que la función f esté definida en x_0 y segundo, que la función pueda dibujarse en x_0 sin levantar el lápiz (es decir, que no haya un salto en el dibujo en $(x_0, f(x_0))$).

Formalicemos ahora la definición de continuidad en un punto:

Definición. Una función f se dice ***continua en un valor*** x_0 si se satisfacen simultáneamente las siguientes tres condiciones:

- $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ (es decir, la función f está definida en x_0).
- Existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (es decir,cuando x se acerca a x_0, tanto por izquierda como por derecha, la función se acerca a un único valor).
- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (es decir, el valor al que se acerca la función y el valor de la función en el punto son el mismo).

Entonces, en las funciones previamente dibujadas, tenemos que:

a) La función h no está definida en 1, por lo tanto h ***no es continua en*** $x_0 = 1$.

b) La función g está definida en 1 pero, si calculamos los límites laterales en ese valor, obtenemos que $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = 2$. Como los límites laterales no coinciden, no existe $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ y por lo tanto g ***no es continua en*** $x_0 = 1$.

c) La función j está definida en 1 y vale $j(1) = 3$. Si calculamos el límite en $x_0 = 1$ da $\lim\limits_{x \to 1} j(x) = 2$. Como estos valores no coinciden, falla la tercera condición de la definición y la función j ***no es continua en*** $x_0 = 1$.

d) La función f está definida en 1 y vale $f(1) = 2$. Por otro lado, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$. Como además los dos valores coinciden, f ***resulta continua en*** $x_0 = 1$.