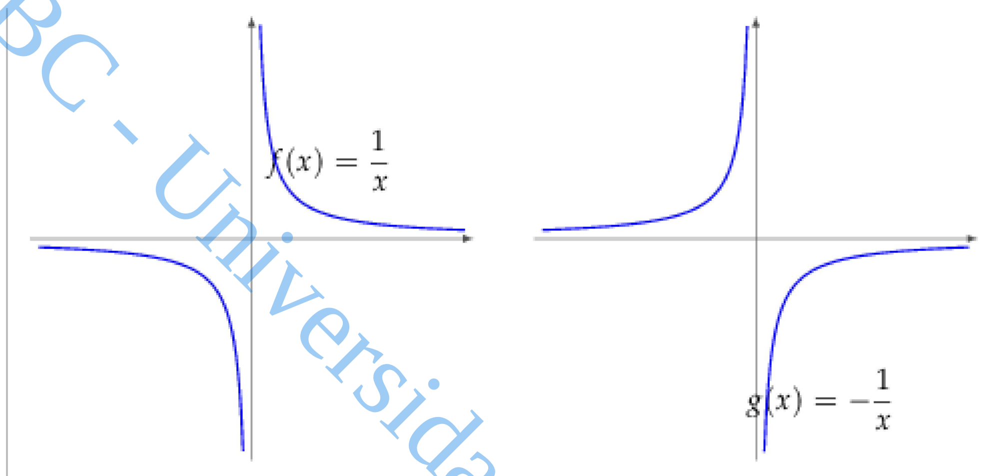
Función homográfica

Las ***funciones homográficas*** son aquellas de la forma

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ y $a.d - b.c \neq 0$.

Las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = -\frac{1}{x}$, son las funciones homográficas más "básicas". Sus gráficos son:



El gráfico de cualquier función homográfica es esencialmente como el de alguna de estas dos funciones. Una de las mayores diferencias se encuentra en la posición de las asíntotas vertical y horizontal.

Estudiemos el comportamiento de las funciones homográficas con un ejemplo.

Ejemplo 1. Hallar dominio, ecuaciones de las asíntotas, ceros y hacer un gráfico aproximado de f, para $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$. A partir del gráfico, analizar imagen, conjunto de positividad y conjunto de negatividad de f.

Notemos que $a = 3$, $b = -5$, $c = 1 \neq 0$, $d = -2$ y $a.d - b.c = -6 + 5 \neq 0$, por lo que f es una función homográfica.

Para calcular el dominio de f, recordemos que no podemos dividir por cero, por lo que tenemos excluir del dominio los valores de x que hagan cero el denominador, que en este caso es $x - 2$:

$$x - 2 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

Por lo tanto

$$\boxed{\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}.}$$

El único candidato para asíntota vertical de f es, entonces, $x = 2$. Calculamos el límite, por ejemplo cuando x tiende a 2 por derecha:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3x-5}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\overbrace{3x-5}^{\to 1}}{\underbrace{x-2}_{\to 0^+}} = +\infty,$$

y como da infinito, podemos afirmar que

$$\boxed{x = 2 \text{ es asíntota vertical de } f.}$$

Como vamos a realizar un gráfico aproximado de f, nos conviene estudiar también el límite cuando x tiende a 2 por izquierda:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{3x-5}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{\overbrace{3x-5}^{\to 1}}{\underbrace{x-2}_{\to 0^-}} = -\infty,$$

Por otro lado,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x-5}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(3 - \frac{5}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(3 - \frac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{\overbrace{\left(3 - \overbrace{\frac{5}{x}}^{\to 0}\right)}^{\to 3}}{\underbrace{\left(1 - \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0}\right)}_{\to 1}} = \frac{3}{1} = 3,$$

y de la misma manera obtenemos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$, por lo que

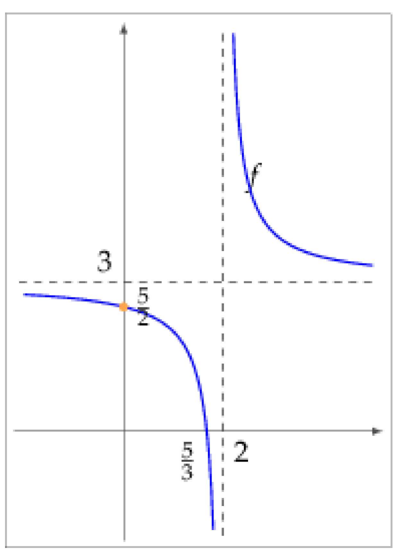
$$\boxed{y = 3 \text{ es asíntota horizontal de } f.}$$

Para hallar los ceros de f debemos resolver la ecuación $f(x) = 0$, es decir

$$\frac{3x-5}{x-2} = 0,$$

y esto sucede si y solo si $3x - 5 = 0$, o equivalentemente, cuando $x = \frac{5}{3}$.

Teniendo en cuenta los límites laterales cuando x tiende a 2 podemos tener una idea aproximada del gráfico. Pero, otra forma de ver de qué lado de las asíntotas aparece el gráfico es evaluar la función en un punto y ubicarlo en el gráfico. Por ejemplo, calculemos $f(0) = \frac{5}{2}$. Por lo tanto, el gráfico aproximado de f es



A partir de este gráfico, se ve que