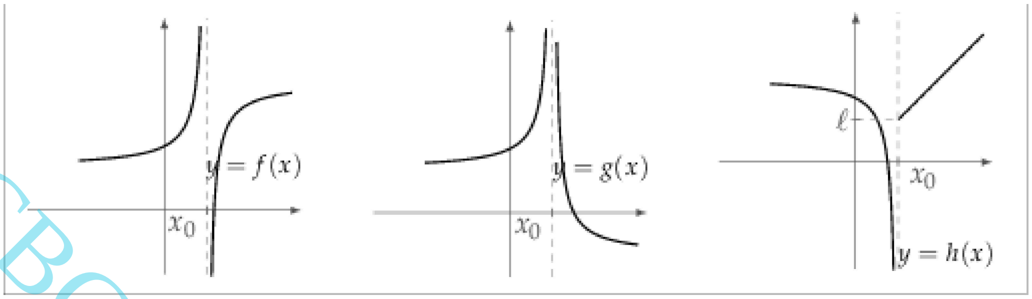
Límite puntual y asíntotas verticales

Consideremos los siguientes gráficos de funciones:



En el gráfico de la función f observamos que, cuando x se acerca a x_0 por la izquierda (es decir, considerando sólo valores x tales que $x < x_0$), la función toma valores positivos arbitrariamente grandes. En este caso, decimos que el ***límite de*** $f(x)$ ***cuando*** x ***tiende a*** x_0 ***por izquierda es*** $+\infty$ y escribimos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

(el signo $-$ en x_0^- indica que la variable se acerca a x_0 por *izquierda*).

Asimismo, a medida que x se acerca a x_0 por la derecha (es decir, considerando sólo valores x tales que $x > x_0$), la función toma valores negativos arbitrariamente grandes en valor absoluto. En este caso, decimos que el ***límite de*** $f(x)$ ***cuando*** x ***tiende a*** x_0 ***por derecha es*** $-\infty$ y escribimos

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

(el signo $+$ en x_0^+ indica que la variable se acerca a x_0 por *derecha*).

Algo similar puede observarse en el gráfico de g: acercándonos a x_0 ya sea por la izquierda o por la derecha, se obtienen valores de $g(x)$ que son tan grandes como uno quiera; es decir,

$$\lim_{x \to x_0^-} g(x) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to x_0^+} g(x) = +\infty$$

Un comportamiento parecido se observa en el gráfico de h cuando x
se acerca a x_0 por la izquierda:

$$\lim_{x \to x_0^-} h(x) = -\infty$$

Sin embargo, cuando x se acerca a x_0 por la derecha, vemos en el gráfico que se obtienen valores de $h(x)$ tan cercanos al número ℓ como se quiera. Decimos entonces que el ***límite de*** $h(x)$ ***cuando*** x ***tiende a*** x_0 ***por la derecha es*** ℓ y escribimos

$$\lim_{x \to x_0^+} h(x) = \ell$$

Si el límite de una función f, cuando x tiende a x_0 por izquierda, da infinito ($+\infty$ o $-\infty$), o bien el límite cuando x tiende a x_0 por derecha da infinito, o si se dan ambas situaciones simultáneamente, se dice que la recta $x = x_0$ es una ***asíntota vertical*** para f.

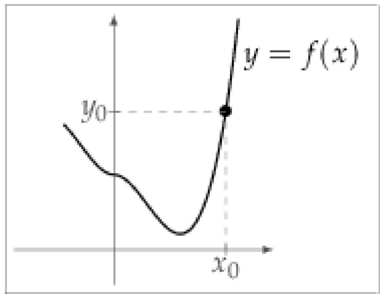
Por ejemplo, las funciones f, g y h de los gráficos de arriba tienen asíntota vertical $x = x_0$ (si bien $\lim_{x \to x_0+} h(x) = \ell$ no es infinito, alcanza con $\lim_{x \to x_0^-} h(x) = -\infty$ para afirmar que $x = x_0$ es asíntota vertical para h).

La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene asíntota vertical $x = 0$; en efecto, $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

No necesariamente los límites por derecha y por izquierda deben dar distinto, o infinito. Por ejemplo, en la función f del siguiente gráfico vemos que dado un valor x_0, si x está suficientemente cerca de x_0 (ya sea a la derecha o a la izquierda), los valores de $f(x)$ están arbitrariamente cerca del número $y_0 = f(x_0)$; es decir,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

(la notación $x \to x_0$ significa que x se acerca a x_0 tanto por la derecha como por la izquierda).



Ejemplos

Calcularemos a continuación algunos límites de funciones dadas por sus fórmulas. Usaremos algunas propiedades que vimos en las explicaciones sobre límites de funciones en infinito, que también valen para los límites de funciones en un punto.

1. $\lim\limits_{x \to 5}(-3x^2 + 1)$

Para la función $f(x) = -3x^2 + 1$, por las propiedades de álgebra de límites, tenemos que

$$\lim_{x \to 5} -3x^2 + 1 = -3.25 + 1 = -74$$

2. $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{-3x^2 + 1}{x - 5}$ y $\lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{-3x^2 + 1}{x - 5}$

En este caso, $x = 5$ no pertenece al dominio de la función, puesto que en ese punto se anula el denominador.

Observar que cuando $x \to 5^-$ se tiene que $x < 5$ y, por lo tanto, $x - 5 < 0$; así, $x - 5$ tiende a 0, pero toma siempre valores negativos. Escribiremos $\to 0^-$ para indicar que la función que precede la flecha tiende a 0 tomando siempre valores menores que 0. Tenemos entonces una fracción tal que, cuando $x \to 5^-$, el numerador $-3x^2 + 1$ toma valores arbitrariamente cercanos a -74 (ver ejemplo anterior) y el denominador $x - 5$ se hace arbitrariamente chico en valor absoluto, pero siempre negativo; en consecuencia, la fracción toma valores positivos arbitrariamente grandes:

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{\overbrace{-3x^2 + 1}^{\to -74}}{\underbrace{x - 5}_{\to 0^-}} = +\infty$$

Como este límite da infinito, podemos deducir que $x = 5$ es asíntota vertical para la función $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 1}{x - 5}$.

Cuando $x \to 5^+$ se tiene que $x > 5$ y, por lo tanto, $x - 5 > 0$; así, $x - 5$ tiende a 0, pero toma siempre valores positivos (en este caso, escribiremos $\to 0^+$). Dado que, cuando $x \to 5^+$, el numerador $-3x^2 + 1$ tiende a -74 y teniendo en cuenta que el denominador $x - 5$ toma valores arbitrariamente chicos y positivos, resulta que la fracción toma valores negativos arbitrariamente grandes en valor absoluto. Concluimos entonces que