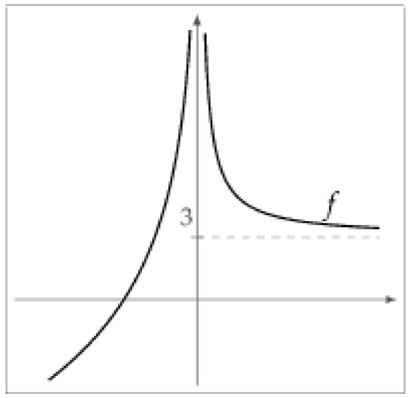
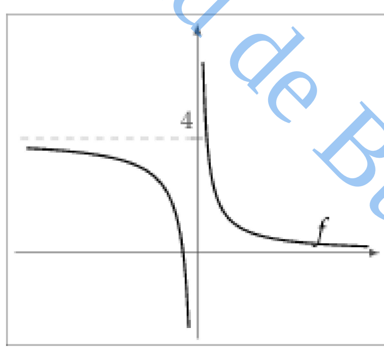
Asíntotas horizontales

Si los valores $f(x)$ de una función se acercan tanto como se desee a un valor fijo b cuando se toman valores de x positivos, suficientemente grandes, decimos que el límite cuando x tiende a más infinito de $f(x)$ es b $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b\right)$ y que la recta de ecuación $y = b$ es una *asíntota horizontal por derecha* para f.



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3 \text{ es asíntota horizontal por derecha para } f.$$

Si los valores de f se acercan tanto como se desee a un valor fijo b cuando se toman valores de x negativos, suficientemente grandes en valor absoluto, decimos que el límite cuando x tiende a menos infinito de $f(x)$ es b $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b\right)$ y que la recta de ecuación $y = b$ es *asíntota horizontal por izquierda para* f.



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4 \quad \Rightarrow \quad y = 4 \text{ es asíntota horizontal por izquierda para } f.$$

Veamos cómo encontrar las asíntotas horizontales de una función dada por su fórmula:

a) $f(x) = \dfrac{5x^3 - 2}{7x^3 + 8}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3-2}{7x^3+8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(5-\dfrac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(7+\dfrac{8}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(5-\dfrac{2}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(7+\dfrac{8}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\left(5-\overbrace{\dfrac{2}{x^3}}^{\to 0}\right)}^{\to 5}}{\underbrace{\left(7+\underbrace{\dfrac{8}{x^3}}_{\to 0}\right)}_{\to 7}} = \frac{5}{7}.$$

Luego $y = \frac{5}{7}$ es asíntota horizontal por derecha para f. Y con la misma cuenta, pero calculando ahora el límite cuando x tiende a menos infinito, determinamos que $y = \frac{5}{7}$ es también asíntota horizontal por izquierda para f. Como ambas asíntotas son la misma, se dice que $\boxed{y = \frac{5}{7}}$ es *asíntota horizontal para* f.

b) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{x + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x}\left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \overbrace{x}^{\to +\infty} \cdot \frac{\overbrace{\left(1 - \overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\to 0}\right)}^{\to 1}}{\underbrace{\left(1 + \underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}\right)}_{\to 1}} = +\infty$$

En este caso f no tiene asíntota horizontal por derecha. Queda como ejercicio ver que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y, por lo tanto, tampoco hay asíntota horizontal por izquierda.